# Calcul des caractéristiques aérodynamiques d'un rotor en mouvement de translation rectiligne et rotation uniformes

Jean Fourcade <autogire@volucres.fr>

18 janvier 2016

# Table des matières

1	Modélisation théorique 7					
	1.1	1 Définition des repères				
	1.2	Calcul des forces aérodynamiques	11			
	1.3	Calcul des moments de battement et de trainée				
	1.4	Calcul du moment de torsion				
		1.4.1 Calcul du moment de torsion aérodynamique	18			
		1.4.2 Calcul du moment de torsion dû à la force centrifuge	19			
		1.4.3 Calcul du moment dû à l'inertie de torsion	21			
	1.5	Tableau récapitulatif des forces et moments $\dots \dots \dots$	22			
	1.6	Intégration des forces et moments				
	1.7	Etude du battement	23			
	1.8	Equation de déformation de torsion	27			
	1.9	Resultats de calculs $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	28			
	1.10	Expressions des forces par rapport au disque rotor				
	1.11	Calcul de la polaire rotorique				
	1.12	Calcul de la vitesse induite	31			
	1.13	Codage des équations	37			
	1.14	Revue des hypothèses	38			
<b>2</b>	Caractéristiques remarquables d'un rotor en autorotation 40					
	2.1	Variation de la vitesse à incidence constante	40			
	2.2	Etude du coefficient de perméabilité	41			
	2.3	Fonctionnement en mode autogire	42			
3	Applications numériques					
	3.1	Test de validation des fonctions analytiques	43			
	3.2	Test de validation en mode autogire	44			
	3.3	Test de validation en mode hélicoptère	53			
	3.4	Etude des coefficients de portance et de trainée	56			
	3.5	Evolution des forces et moments en fonction de l'azimut $$	59			
Δ	Rési	ultats Manle 63				

#### Introduction

Ce rapport a pour objet le calcul des paramètres aérodynamiques d'un rotor dont le mouvement se caractérise par une vitesse rectiligne uniforme et une rotation uniforme. Ce document comporte trois parties et une annexe :

- la première partie traite des équations de la mécanique qui conduisent aux expressions analytiques des forces, moments et coefficients de battement du rotor ainsi qu'aux équations de calcul de la déformation de torsion des pales;
- la deuxième partie expose les propriétés remarquables d'un rotor en régime établi d'autorotation;
- la troisième partie donnes quelques exemples d'applications numériques dont un cas de validation sur des mesures réelles d'un vol.

Les intégrales des équations conduisant aux formules analytiques exposées dans ce document ont été calculées avec le logiciel de calcul formel Maple dont les résultats sont fournis en annexe.

Les développements mathématiques sont principalement basés sur les travaux de H. Glauert (référence [1]) et John B. Wheatley (références [2], [3] et [4]).

Les équations développées dans cette note ont été codées dans la bibliothèque Java GyroKit et ont conduit à la réalisation du programme GyroRotor.

# Nomenclature

$\alpha_B$	incidence de la pale à la distance $r$ du pied de pale
$\alpha_S$	incidence de la vitesse par rapport au plan d'entrainement
$ar{\lambda}$	vitesse de descente normalisée
$ar{\mu}$	vitesse d'avancement normalisée
$\bar{v}$	vitesse induite normalisée
$\beta$	angle de battement
$\delta$	coefficient de traînée du profil de la pale
$\eta$	rapport définissant le mode de fonctionnement du rotor
$\gamma$	nombre de Lock
$\hat{p}$	vitesse de roulis normalisée $(\hat{p} = p/\dot{\psi})$
$\hat{q}$	vitesse de tangage normalisée ( $\hat{q}=q/\dot{\psi}$ )
$\lambda$	facteur de perméabilité
$\lambda_D$	coefficient de perméabilité dans le repère $\mathcal{T}_D$
${\cal P}$	pale du rotor considéré dans son ensemble
$\mathcal{T}_B$	repère lié à la pale
$\mathcal{T}_D$	repère constitué à partir du plan formé par le saumon des pales
$\mathcal{T}_F$	repère en translation et rotation uniforme
$\mathcal{T}_I$	repère inertiel de référence
$\mathcal{T}_P$	repère pale définit en un point $P$ de celle-ci
$\mathcal{T}_R$	repère rotor tournant
$\mathcal{T}_S$	repère rotor
$\mu$	facteur d'avancement
$\mu_D$	coefficient d'avancement dans le repère $\mathcal{T}_D$
$\nu(x)$	déformation de torsion de la pale
$\psi$	angle d'azimut de la pale
ho	densité atmosphérique

 $\theta_0$  pas de la pale au pied de pale

 $\theta_B$  angle de pas

 $\theta_{TW}$  vrillage de la pale

 $\vec{\Omega}(\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_I)$  vecteur rotation instantané du repère  $\mathcal{T}_B$  par rapport au repère  $\mathcal{T}_I$ 

 $\vec{\Omega}(\mathcal{T}_S/\mathcal{T}_I)$  rotation instantanée du repère rotor =  $\vec{\Omega}(\mathcal{T}_F/\mathcal{T}_I)$ 

 $\vec{\sigma}(S, \mathcal{P}/\mathcal{T}_I)$  moment cinétique de la pale  $\mathcal{P}$  calculé au point S

 $ec{D}$  traînée du rotor  $ec{L}$  portance du rotor

 $\vec{R}$  résultante des forces aérodynamiques générée par le rotor

 $\vec{U}(P/\mathcal{T}_I)$  vitesse du point P de la pale  $\vec{U}(S/\mathcal{T}_I)$  vitesse de translation du rotor

 $ec{V}$  vitesse de l'air par rapport à la pale

A surface du disque rotorique

a pente du coefficient de portance du profil de la pale (1/rad)

 $a_0$  angle de conicité du rotor

 $a_1$  angle de basculement longitudinal du rotor

 $a_2$  angle du deuxième ordre de basculement longitudinal du rotor

B facteur de perte de portance en bout de pale

b nombre de pales

 $b_1$  angle de basculement latéral du rotor

 $b_2$  angle du deuxième ordre de basculement latéral du rotor

c corde du profil de la pale

 $C_d$  coefficient de trainée du profil de la pale  $C_l$  coefficient de portance du profil de la pale

 $C_M$  coefficient de moment aérodynamique du profil exprimé au centre

de gravité

 $C_m$  coefficient de moment aérodynamique du profil exprimé au foyer

 $C_Q$  coefficient du couple robotique total  $C_T$  coefficient de la force axiale rotorique

 $C_{HD}$  coefficient de la force latérale totale exprimée dans le plan rotor

 $C_{Hi}$  coefficient de la force arrière induite  $C_{Hp}$  coefficient de la force arrière de profil  $C_{Qi}$  coefficient du couple rotorique induit

 $C_{Qp}$  coefficient du couple rotorique de profil

 $C_{Yi}$  coefficient de la force latérale induite

H résultante des forces aérodynamique suivant l'axe  $\vec{Y}_S$ ; compté po-

sitivement quand elle est de sens opposée à la vitesse

h coordonnée du foyer aérodynamique suivant l'axe  $\vec{Z}_P$  (m)

 $H_D$  force arrière dans le repère  $\mathcal{T}_D$ 

 $I(S, \mathcal{P})$  tenseur d'inertie de la pale  $\mathcal{P}$  calculé au point S

 $I_y$  moment quadratique de la section de pale moment quadratique de la section de pale

 $I_{xx}$  inertie de pas de la pale

 $I_{yy}$  inertie de battement de la pale  $I_{zz}$  inertie de traînée de la pale

 $K_F$  facteur de normalisation des forces

 $K_Q$  facteur de normalisation des moments

l coordonnée du foyer aérodynamique suivant l'axe  $\vec{Y}_P$  (m)

M moment rotorique en battement

n facteur de charge

P un point de la pale

p vitesse angulaire de roulis

Q moment rotorique en azimut q vitesse angulaire de tangage

R longueur de la pale

r abscisse du point P de la pale

r vitesse angulaire de lacet

s coefficient de plénitude du rotor

T résultante des forces aérodynamique suivant l'axe  $\vec{Z}_S$ ; composante

axiale

 $T_D$  force axiale dans le repère  $\mathcal{T}_D$ 

 $U_P$  composante perpendiculaire de la vitesse air par rapport à la pale

 $U_R$  composante radiale de la vitesse air par rapport à la pale

 $U_T$  composante tangentielle de la vitesse air par rapport à la pale

v composante de la vitesse suivant  $\vec{Y}_H$ 

 $v_i$  vitesse induite par les forces rotoriques

W	poids de l'autogire
w	composante de la vitesse suivant $\vec{Z}_H$
x	abscisse normalisée du point $P(x=r/R)$
$x_{ac}$	position du foyer du profil par rapport au bord d'attaque ramené à la corde
$x_{cg}$	position du centre de gravité du profil par rapport au bord d'attaque ramené à la corde
Y	résultante des forces aérodynamique suivant l'axe $\vec{X}_S$ ; composante latérale compté positivement vers la pale avançante
$Y_D$	force latérale dans le repère $\mathcal{T}_D$

# Chapitre 1

# Modélisation théorique

## 1.1 Définition des repères

Notons  $\mathcal{T}_I = (O, \vec{X}_I, \vec{Y}_I, \vec{Z}_I)$  le repère inertiel dont l'axe  $\vec{Z}_I$  constitue la verticale locale descendante. Le point O est le centre de ce repère.

Notons  $\mathcal{T}_F = (S, \vec{X}_F, \vec{Y}_F, \vec{Z}_F)$  un repère animé d'un mouvement de translation et de rotation uniformes par rapport au repère inertiel  $\mathcal{T}_I$ . Le point S est l'intersection entre le moyeu et l'axe de battement du rotor. Le plan  $(\vec{X}_F, \vec{Y}_F)$  matérialise le plan d'entrainement du rotor (plan perpendiculaire au moyeu). L'axe  $\vec{X}_F$  est orienté vers l'avant et l'axe  $\vec{Z}_F$  vers le bas (voir figure 1.1). Ces axes sont tels que la vitesse du point S appartient au plan  $(\vec{X}_F, \vec{Z}_F)$ .

On note  $\vec{\Omega}(\mathcal{T}_F/\mathcal{T}_I)$  le vecteur vitesse angulaire de rotation du repère  $\mathcal{T}_F$  par rapport au repère  $\mathcal{T}_I$ . Les composantes de ce vecteur dans le repère  $\mathcal{T}_F$  s'expriment par :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{T}_F/\mathcal{T}_I) = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_F}$$
(1.1)

Soit  $\mathcal{T}_S = (S, \vec{X}_S, \vec{Y}_S, \vec{Z}_S)$  le repère rotor proprement dit. L'axe  $\vec{Z}_S$  constitue le moyeu et est dirigé vers le haut. Le plan  $(\vec{X}_S, \vec{Y}_S)$  est le plan d'entrainement du rotor. On passe du repère  $\mathcal{T}_F$  au repère  $\mathcal{T}_S$  par une transformation définie par la matrice :

$$M_{SF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Le repère  $\mathcal{T}_S$  étant fixe par rapport au repère  $\mathcal{T}_F$ , on en déduit que  $\vec{\Omega}(\mathcal{T}_F/\mathcal{T}_I) = \vec{\Omega}(\mathcal{T}_S/\mathcal{T}_I)$ . Les composantes de ce vecteur dans le repère  $\mathcal{T}_S$  s'expriment par :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{T}_S/\mathcal{T}_I) = \begin{pmatrix} q \\ p \\ -r \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_F}$$
(1.3)

Notons  $\alpha_S$  l'angle d'incidence de la vitesse de telle manière que cet angle soit positif quand sa composante w est négative (voir la figure 1.1). On déduit :

$$\alpha_S = \arctan(-\frac{w}{u}) \tag{1.4}$$

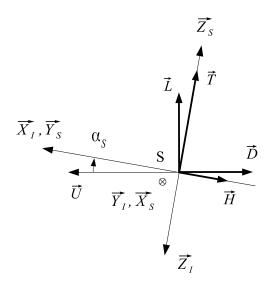


FIGURE 1.1 – Forces aérodynamiques

Le vecteur vitesse  $\vec{U}(S/\mathcal{T}_I)$  s'écrit :

$$\vec{U}(S/\mathcal{T}_I) = \begin{pmatrix} 0 \\ U\cos\alpha_S \\ -U\sin\alpha_S \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_I}$$
(1.5)

On passe du repère rotor  $\mathcal{T}_S$  au repère rotor tournant  $\mathcal{T}_R = (S, \vec{X}_R, \vec{Y}_R, \vec{Z}_R)$  par une rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $\vec{Z}_S$  (voir la figure 1.2). L'angle  $\psi$  constitue l'azimut de la pale. L'origine est telle que  $\psi$  vaut 180 degrés quand le vecteur  $\vec{X}_R$  est confondu avec  $\vec{Y}_S$  (la pale se situe en avant de l'aéronef).

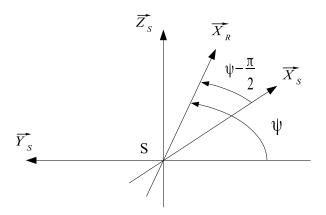


FIGURE 1.2 – Repère tournant

Ainsi quand:

 $\psi \in [0...\pi]$  la pale se trouve dans la région avançante (la vitesse de translation du rotor s'additionne à la vitesse propre de la pale);

 $\psi \in [\pi \dots 2\pi]$  la pale se trouve dans la région reculante (la vitesse de translation du rotor se soustrait à la vitesse propre de la pale).

Cette rotation définit le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_R} = \begin{pmatrix} \sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_S}$$
(1.6)

On passe du repère rotor tournant  $\mathcal{T}_R$  au repère  $\mathcal{T}_B = (S, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B)$  matérialisant la pale par une rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $-\vec{Y}_R$  (voir la figure 1.3).

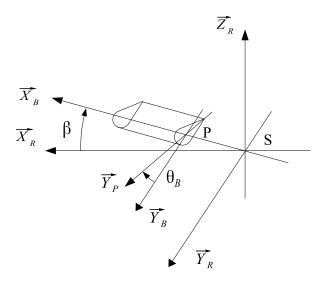


FIGURE 1.3 – Repères pales

L'angle  $\beta$  constitue l'angle de battement. Il est orienté par l'axe  $-\vec{Y}_R$  afin d'être positif quand la pale située en avant de l'aéronef se lève. Nous ferons l'hypotèse que l'angle de battement est un petit angle et nous limiterons son developpement à l'ordre un.

La rotation de battement définit la transformation de coordonnées suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_R}$$
(1.7)

La composition des rotations en azimuth et en battement s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B} = \begin{pmatrix} \sin \psi & -\cos \psi & \beta \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\beta \sin \psi & \beta \cos \psi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_S}$$
(1.8)

On déduit l'expression du vecteur vitesse dans  $\mathcal{T}_B$ :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} -U\cos\alpha_S\cos\psi - U\beta\sin\alpha_S \\ U\cos\alpha_S\sin\psi \\ U\beta\cos\alpha_S\cos\psi - U\sin\alpha_S \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B}$$
(1.9)

Soit P un point de la pale situé sur l'axe  $\vec{X}_B$ . On passe du repère  $\mathcal{T}_B$  au repère local de la pale  $\mathcal{T}_P = (P, \vec{X}_P, \vec{Y}_P, \vec{Z}_P)$  par une rotation d'angle  $\theta_B$  autour de l'axe  $\vec{X}_B$  (voir la figure 1.3).

L'angle  $\theta_B$  est l'angle de pas et  $\vec{X}_B$  est l'axe de pas. L'angle de pas varie le long de la pale et dépend donc de la coordonnée du point P. L'axe  $\vec{Y}_P$  est par définition la ligne de portance nulle du profil. La rotation de pas définit la transformation de coordonnées suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{B} & \sin \theta_{B} \\ 0 & -\sin \theta_{B} & \cos \theta_{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_{R}}$$
(1.10)

On note  $I(S,\mathcal{P})$  le tenseur d'inertie de la pale  $\mathcal{P}$  calculé au point S. On suppose que le centre de gravité de chaque section de pale est situé sur l'axe  $\vec{X}_B$ .

Considérons dans un premier temps que le pas est nul en tout point de la pale ce qui revient à confondre les repères  $\mathcal{T}_P$  et  $\mathcal{T}_B$ . Nous supposerons que le repère  $\mathcal{T}_P$  est le repère principal d'inertie de la pale. Le tenseur d'inertie s'exprime alors sous la forme :

$$I(S, \mathcal{P}) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}}$$
(1.11)

Par construction:

- $I_{xx}$  définit l'inertie de pas de la pale;
- $I_{yy}$  définit l'inertie de battement de la pale;
- $I_{zz}$  définit l'inertie de traînée de la pale.

Des expressions:

$$I_{xx} = \int_{\mathcal{D}} (y^2 + z^2) dm \tag{1.12}$$

$$I_{yy} = \int_{\mathcal{D}} (z^2 + x^2) dm \tag{1.13}$$

On déduit :

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_{\mathcal{D}} (y^2 + 2z^2 + x^2) dm$$
 (1.14)

Etant donnée que la coordonnée z du profil de la pale est toujours petite devant les coordonnées x et y, on peut écrire :

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_{\mathcal{P}} (y^2 + x^2) dm = I_{zz}$$
 (1.15)

On déduit finalement la forme du tenseur d'inertie :

$$I(S, \mathcal{P}) = \begin{pmatrix} I_{zz} - I_{yy} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_P}$$
(1.16)

Nous considérerons que cette forme est encore valable quand le pas n'est pas nul et que  $I(S, \mathcal{P})$  s'exprime de cette manière aussi bien dans  $\mathcal{T}_B$  que dans  $\mathcal{T}_P$ 

## 1.2 Calcul des forces aérodynamiques

On suppose le rotor composé de b pales de longueur R et de corde c. On note  $A = \pi R^2$  la surface du disque rotorique et  $\rho$  la densité atmosphérique.

On note  $\vec{L}$  et  $\vec{D}$  respectivement la portance et la traı̂née générées par le rotor.

La résultante des forces aérodynamiques  $\vec{R}$  générée par le rotor se décompose traditionnellement en trois forces T, H et Y (voir la figure 1.1) telles que :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} Y \\ -H \\ T \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_S} \tag{1.17}$$

- T est la résultante suivant l'axe  $\vec{Z}_S$  (composante axiale);
- H est la résultante suivant l'axe  $\vec{Y}_S$  (composante arrière compté positivement dans le sens opposé à la vitesse);
- Y est la résultante suivant l'axe  $\vec{X}_S$  (composante latérale compté positivement vers la pale avançante).

Exprimons le vecteur de rotation instantané de la pale. Il s'agit de la rotation du repère  $\mathcal{T}_B$  par rapport au repère  $\mathcal{T}_I$ . Cette rotation est formée des vitesses de rotation suivantes :

- q autour de  $\vec{X}_S$  (mouvement de tangage);
- p autour de  $\vec{Y}_S$  (mouvement de roulis);
- -r autour de  $\vec{Z}_S$  (mouvement de lacet);
- $\dot{\psi}$  autour de  $\vec{Z}_S$  (rotation de la pale);
- $\dot{\beta}$  autour de  $-\vec{Y}_R$  (battement de la pale).

Nous pouvons donc écrire:

$$\vec{\Omega}(\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_I) = q\vec{X}_S + p\vec{Y}_S + (\dot{\psi} - r)\vec{Z}_S - \dot{\beta}\vec{Y}_R$$
(1.18)

Exprimons les composantes de ce vecteur dans le repère pale. Nous obtenons :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_I) = \begin{pmatrix} \sin\psi & -\cos\psi & \beta \\ \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\beta\sin\psi & \beta\cos\psi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \\ \dot{\psi} - r \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_G} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_D}$$
(1.19)

En considérant que les vitesses de rotation p,q,r sont petites devant la vitesse de rotation du rotor  $\dot{\psi}$ , on obtient :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_I) = \begin{pmatrix} \beta \dot{\psi} + q \sin \psi - p \cos \psi \\ -\dot{\beta} + q \cos \psi + p \sin \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B}$$
(1.20)

La vitesse de lacet n'intervient donc plus dans les équations. A partir de maintenant nous noterons r l'abscisse du point P de la pale dans le repère  $\mathcal{T}_B$ :

$$\overrightarrow{SP} = r\vec{X}_B \tag{1.21}$$

On déduit la vitesse du point P par rapport au repère  $\mathcal{T}_I$ :

$$\vec{U}(P/\mathcal{T}_I) = \vec{\Omega}(\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_I) \wedge r\vec{X}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ r\dot{\psi} \\ r\dot{\beta} - rq\cos\psi - rp\sin\psi \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B}$$
(1.22)

Nous pouvons à présent calculer la vitesse de l'air par rapport à la pale noté  $\vec{V}$  afin de calculer les forces aérodynamiques. Celle-ci s'exprime par :

$$\vec{V} = -\vec{U}(S/\mathcal{T}_I) - \vec{U}(P/\mathcal{T}_I) - v_i \vec{Z}_S \tag{1.23}$$

 $v_i$  est la vitesse induite communiquée aux molécules du fait de l'apparition des forces rotoriques. Celle-ci, supposée constante sur toute la surface du disque rotor, sera calculée au paragraphe 1.12.

On obtient en projetant dans le repère pale :

$$\vec{V}(P/T_I) = \begin{pmatrix} U\cos\alpha_S\cos\psi + U\beta\sin\alpha_S \\ -U\cos\alpha_S\sin\psi - r\dot{\psi} \\ -U\beta\cos\alpha_S\cos\psi + U\sin\alpha_S - r\dot{\beta} + rq\cos\psi + rp\sin\psi - v_i \end{pmatrix}_{T_B}$$
(1.24)

Notons  $U_R, U_T, U_P$  les trois composantes de ce vecteur dans le repère  $\mathcal{T}_B$ 

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} U_R \\ -U_T \\ U_P \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_R} \tag{1.25}$$

 $U_T$  est la composante tangentielle (direction principale de la vitesse) compté positivement quand le flux d'air souffle du bord d'attaque vers le bord de fuite,  $U_R$  est la composante radiale (composante le long de la pale) et  $U_P$  la composante perpendiculaire au plan que décrit la pale. On déduit :

$$U_P = -U\beta\cos\alpha_S\cos\psi + U\sin\alpha_S - r\dot{\beta} + rq\cos\psi + rp\sin\psi - v_i \qquad (1.26)$$

$$U_T = U\cos\alpha_S\sin\psi + r\dot{\psi} \tag{1.27}$$

On définit les facteurs suivants :

• le facteur d'avancement

$$\mu = \frac{U \cos \alpha_S}{R\dot{\psi}} \tag{1.28}$$

• le facteur de perméabilité :

$$\lambda = \frac{U \sin \alpha_S - v_i}{R\dot{\psi}} \tag{1.29}$$

Le facteur d'avancement caractérise le flux d'air perpendiculaire au mat rotor ramené à la vitesse du bout de pale. Le facteur de perméabilité caractérise le flux d'air qui traverse le rotor ramené à la vitesse du bout de pale.

Les deux équations ci-dessus permettent de calculer l'incidence du disque rotor. On obtient :

$$\tan \alpha_S = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{v_i}{\mu R \dot{\psi}} \tag{1.30}$$

On définit les quantités suivantes :

- $x = \frac{r}{R}$  abscisse normalisé du point P;
- $\hat{p} = \frac{p}{\psi}$  vitesse normalisée de roulis;
- $\hat{q} = \frac{q}{\dot{\psi}}$  vitesse normalisée de tangage.

En introduisant les coefficients  $\mu$  et  $\lambda$  dans les expressions de  $U_P$  et  $U_R$  et en effectuant le changement de variable tel que  $\frac{d}{dt} = \dot{\psi} \frac{d}{d\psi}$  on obtient :

$$U_P = R\dot{\psi}(-\mu\beta\cos\psi + \lambda - x\frac{d\beta}{d\psi} + x\hat{q}\cos\psi + x\hat{p}\sin\psi)$$
 (1.31)

$$U_T = R\dot{\psi}(\mu\sin\psi + x) \tag{1.32}$$

L'expression de la vitesse tangentielle  $U_T$  montre que quand  $\mu \sin \psi + x$  est négatif, le fux d'air alimente la pale par le bord de fuite. Cette équation définit une région dont la forme est un disque de rayon  $\mu R$  (voir la figure 1.4).

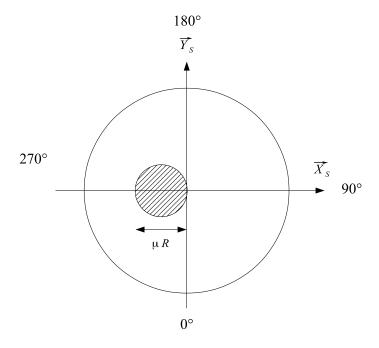


FIGURE 1.4 – Cercle d'inversion

Calculons à présent la portance  $d\vec{L}$  et la traînée  $d\vec{D}$  élémentaires que développe un segment de pale de longueur dr. Notons  $C_l$  et  $C_d$  respectivement le coefficient de portance et de trainée du profil. Nous avons :

$$dL = \frac{1}{2}\rho cC_l V^2 dr \tag{1.33}$$

$$dD = \frac{1}{2}\rho cC_d V^2 dr \tag{1.34}$$

Nous supposerons que le pas  $\theta_B$  de la pale varie linéairement le long de la pale et nous noterons  $\nu(x)$  la déformation de torsion de la pale due aux forces qui s'appliquent sur la pale. Le pas s'écrit donc :

$$\theta_B = \theta_0 + x\theta_{TW} + \nu(x) \tag{1.35}$$

L'angle d'incidence se calcule à partir du pas et de l'angle que prend le vecteur vitesse par rapport à l'axe  $\vec{Y}_B$ . Nous négligerons la composante radiale  $U_R$  de la vitesse pour le calcul de cet angle.

Pour calculer l'incidence, il nous faut considérer deux cas : le cas nominal où le flux d'air alimente le profil par le bord d'attaque  $(U_T > 0)$  et le cas où le flux d'air alimente le profil par le bord de fuite  $(U_T < 0)$ .

Le premier cas est représenté par la figure 1.5.

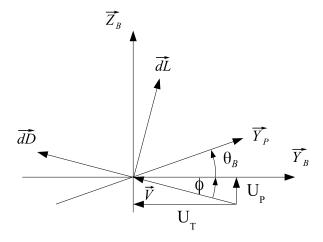


FIGURE 1.5 – Incidence de la pale : flux normal

L'incidence de la pale est l'angle  $\alpha_B = \theta_B + \phi$  avec :

$$\phi = \arctan(\frac{U_P}{U_T}) \tag{1.36}$$

Etant donné que  $\phi$  est un petit angle, on obtient au premier ordre :

$$\phi = \frac{U_P}{U_T} \tag{1.37}$$

Soit:

$$\alpha_B = \theta_B + \frac{U_P}{U_T} \tag{1.38}$$

La figure 1.6 montre le cas où la vitesse relative attaque le profil par le bord de fuite. Dans ce cas l'angle  $\phi$  de la figure s'exprime par :

$$\phi = -\frac{U_P}{U_T} \tag{1.39}$$

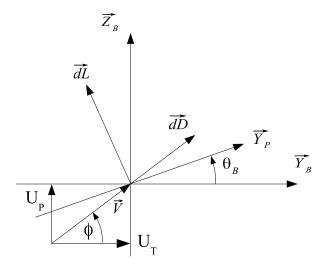


FIGURE 1.6 – Incidence de la pale : flux inversé

L'incidence s'exprime par  $\alpha_B = \phi - \theta_B$ , d'où l'on déduit :

$$\alpha_B = -\theta_B - \frac{U_P}{U_T} \tag{1.40}$$

Notons  $\delta$  le coefficient de traînée de la pale supposée constant. Notons a la pente du coefficient de portance du profil par rapport à l'incidence également supposé constant. On déduit l'expression des coefficients aérodynamiques du profil :

$$C_l = a\alpha_B \tag{1.41}$$

$$C_d = \delta \tag{1.42}$$

Soit:

$$dL = \frac{1}{2}\rho ca\alpha_B V^2 dr \tag{1.43}$$

$$dD = \frac{1}{2}\rho c\delta V^2 dr \tag{1.44}$$

Ayant ignoré  $U_R$  et étant donné que  $U_P$  est généralement faible devant  $U_T$ , le module de la vitesse s'écrit :

$$V = U_T \tag{1.45}$$

Nous considérerons que le profil possède les mêmes coefficients aérodynamiques  $(a, \delta)$  que celui-ci soit alimenté par le bord d'attaque ou le bord de fuite. On déduit l'expression des forces aérodynamiques élémentaires :

$$dL = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho a c (\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dr & \text{si } U_T > 0\\ -\frac{1}{2} \rho a c (\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dr & \text{si } U_T < 0 \end{cases}$$
(1.46)

$$dD = \frac{1}{2}\rho\delta cU_T^2 dr \tag{1.47}$$

En introduisant la coordonnée normalisée x du point P, on déduit :

$$dL = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho a c R(\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dx & \text{si } U_T > 0\\ -\frac{1}{2} \rho a c R(\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dx & \text{si } U_T < 0 \end{cases}$$
(1.48)

$$dD = \frac{1}{2}\rho\delta cRU_T^2 dx \tag{1.49}$$

Les forces élémentaires de portance et de traînée du rotor dans le cas de la figure 1.5 (flux d'air abordant la pale par le bord d'attaque) s'expriment dans  $\mathcal{T}_B$  en négligeant  $\phi dD$  devant dL par :

$$d\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -dD + \phi dL \\ dL + \phi dD \end{pmatrix}_{T_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -dD + \phi dL \\ dL \end{pmatrix}_{T_B}$$
(1.50)

Ces forces s'expriment dans le repère  $\mathcal{T}_S$  par :

$$d\vec{R} = \begin{pmatrix} -dD\cos\psi + dL(-\beta\sin\psi + \phi\cos\psi) \\ -dD\sin\psi + dL(\beta\cos\psi + \phi\sin\psi) \\ dL \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_{S}}$$
(1.51)

En ramenant ces composantes à la définition des forces générées par le rotor T,H et Y on obtient :

$$dT = dL (1.52)$$

$$dH = dD\sin\psi - dL(\beta\cos\psi + \phi\sin\psi) \tag{1.53}$$

$$dY = -dD\cos\psi + dL(-\beta\sin\psi + \phi\cos\psi) \tag{1.54}$$

Pour simplifier les calculs nous ne prendrons pas en compte l'effet d'inversion du flux pour le calcul de dH et dY et considérerons que les équations ci-dessus sont valables quel que soit le signe de  $U_T$ .

On remarque que les équations qui fournissent les expressions des forces H, Y font apparaître deux termes : un terme qui dépend de la traînée dD et un autre qui dépend de la portance dL.

Nous distinguerons ces termes dans les calculs. Les termes dépendant de la traînée seront indicés de la lettre P indiquant que leur origine provient directement du profil et les termes dépendant de la portance seront indicés par la lettre I indiquant qu'ils sont induits par cette dernière.

En remplaçant dL et dD par leurs valeurs dans l'expression des forces ci-

dessus on obtient finalement:

$$dT = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho acR(\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dx & \text{si } U_T > 0\\ -\frac{1}{2} \rho acR(\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dx & \text{si } U_T < 0 \end{cases}$$
 (1.55)

$$dH_P = \frac{1}{2}\rho \delta c R U_T^2 \sin \psi dx \tag{1.56}$$

$$dH_{I} = -\frac{1}{2}\rho acR((\theta_{B}U_{T}^{2} + U_{P}U_{T})\beta\cos\psi + (\theta_{B}U_{P}U_{T} + U_{P}^{2})\sin\psi)dx \quad (1.57)$$

$$dY_P = -\frac{1}{2}\rho\delta cRU_T^2\cos\psi dx \tag{1.58}$$

$$dY_{I} = \frac{1}{2}\rho acR(-(\theta_{B}U_{T}^{2} + U_{P}U_{T})\beta\sin\psi + (\theta_{B}U_{P}U_{T} + U_{P}^{2})\cos\psi)dx \qquad (1.59)$$

#### 1.3 Calcul des moments de battement et de trainée

Il s'agit de calculer les moments par rapport aux axes d'articulation du rotor. Considérons dans un premier temps le cas où le flux d'air alimente le profil par le bord d'attaque.

Le torseur des forces aérodynamique au point P se compose d'une résultante  $d\vec{R}$  et d'un moment de torsion suivant l'axe  $\vec{X}_P$ . Intéressons nous pour l'instant au moment dû uniquement à la résultante  $d\vec{R}$ . Celle-ci s'écrit :

$$d\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -dD + \frac{U_P}{U_T} dL \\ dL \end{pmatrix}_{T_P}$$
 (1.60)

Le moment de la force aérodynamique est alors :

$$\overrightarrow{SP} \wedge \overrightarrow{dF} = R \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -dD + \frac{U_P}{U_T} dL \\ dL \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -dM \\ dQ \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B}$$
(1.61)

Ce calcul conduit à un moment suivant l'axe  $\vec{Y}_B$  égal à :

$$dM = RxdL (1.62)$$

Et un moment suivant l'axe  $\vec{Z}_R$  égal à :

$$dQ = Rx(-dD + \frac{U_P}{U_T}dL)$$
 (1.63)

Le premier moment est le moment de battement (il régit la variation de l'angle  $\beta$ ) et le deuxième moment celui de rotation proprement dit du rotor (il régit la variation de l'angle  $\psi$ ).

Dans le cas où le flux d'air alimente le rotor par le bord de fuite, la résultante  $\vec{dR}$  s'exprime par :

$$d\vec{R} = \begin{pmatrix} 0\\ dD + \frac{U_P}{U_T} dL\\ dL \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B}$$
 (1.64)

On en déduit les moments :

$$dM = RxdL (1.65)$$

$$dQ = Rx(dD + \frac{U_P}{U_T}dL) \tag{1.66}$$

On obtient finalement en distinguant les termes de profil des termes induits :

$$dQ_{P} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \rho \delta c R^{2} x U_{T}^{2} dx & \text{si } U_{T} > 0\\ \frac{1}{2} \rho \delta c R^{2} x U_{T}^{2} dx & \text{si } U_{T} < 0 \end{cases}$$
(1.67)

$$dQ_{I} = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho a c R^{2} x (\theta_{B} U_{P} U_{T} + U_{P}^{2}) dx & \text{si } U_{T} > 0\\ -\frac{1}{2} \rho a c R^{2} x (\theta_{B} U_{P} U_{T} + U_{P}^{2}) dx & \text{si } U_{T} < 0 \end{cases}$$
(1.68)

$$dM = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho a c R^2 x (\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dx & \text{si } U_T > 0\\ -\frac{1}{2} \rho a c R^2 x (\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dx & \text{si } U_T < 0 \end{cases}$$
(1.69)

#### 1.4 Calcul du moment de torsion

Calculons à présent le moment de torsion de la pale (moment suivant l'axe  $\vec{X}_P$ ). La pale est soumise à trois moments de torsion qui sont :

- le moment dû aux forces aérodynamiques;
- le moment dû à la force centrifuge;
- le moment dû à l'inertie de rotation.

Pour simplifier, nous négligerons l'effet du cercle d'inversion. L'incidence s'exprime donc quelque soit le signe de  $U_T$  par

$$\alpha_B = \theta_B + \frac{U_P}{U_T} \tag{1.70}$$

#### 1.4.1 Calcul du moment de torsion aérodynamique

Le schéma de la figure 1.7 représente la position du foyer (AC) et du centre de gravité (CG) du profil de la pale.

On note l et h les coordonnées du foyer dans le repère  $\mathcal{T}_P$ .

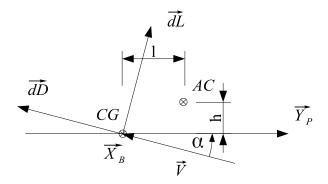


FIGURE 1.7 – Position du foyer par rapport au centre de gravité

Notons  $C_m$  le coefficient de moment aérodynamique du profil exprimé au foyer. Calculons le coefficient  $C_M$  de ce même moment exprimé au centre de gravité. Nous avons :

$$C_M = C_m + \frac{l}{c}(C_l \cos \alpha_B + C_d \sin \alpha_B) - \frac{h}{c}(C_l \sin \alpha_B - C_d \cos \alpha_B)$$
 (1.71)

En remplacant  $C_l$  et  $C_d$  par leur valeur, en negligeant  $\delta$  devant a et en négligeant les terme du second ordre de l'incidence, on obtient :

$$C_M = C_m + \frac{la}{c}\alpha_B \tag{1.72}$$

Le moment aérodynamique élémentaire s'écrit alors :

$$dN = \frac{1}{2}\rho c^2 U_T^2 C_M dr (1.73)$$

On déduit :

$$dN = \frac{1}{2}\rho c^{2} [U_{T}^{2}(C_{m} + \frac{la}{c}\theta_{B}) + \frac{la}{c}U_{P}U_{T})]dr$$
 (1.74)

Soit en se ramenant à la variable x:

$$dN = \frac{1}{2}\rho c^2 R[U_T^2(C_m + \frac{la}{c}\theta_B) + \frac{la}{c}U_P U_T)]dx$$
 (1.75)

#### 1.4.2 Calcul du moment de torsion dû à la force centrifuge

La force centrifuge crée un moment de torsion qui a pour effet de s'opposer à toute variation de pas : c'est le rappel à plat. La composante principale de cette force étant due à la rotation du rotor  $(\dot{\psi})$ , nous considérerons pour son calcul que le battement est nul ainsi que les vitesse de roulis et de tangage.

Soit un point M de la pale défini dans le repère  $\mathcal{T}_B$  par ses coordonnées r,y,z.

La figure 1.8 représente le point M dans le plan de rotation de la pale et dans le plan du profil.

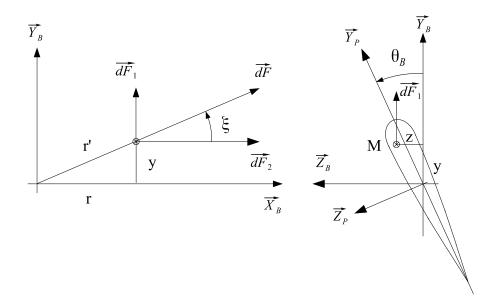


Figure 1.8 – Force centrifuge sur un élement de pale

La force centrifuge élémentaire  $d\vec{F}$  que subit se point se décompose en deux forces élementaire  $d\vec{F}_1$  et  $d\vec{F}_2$  avec  $d\vec{F}_1$  perpendiculaire à l'axe de pas.

Nous avons:

$$dF_1 = dF\sin\xi \tag{1.76}$$

En notant dm la masse de cet élément de pale, on obtient :

$$dF_1 = \dot{\psi}^2 r \sin \xi dm = \dot{\psi}^2 y dm \tag{1.77}$$

Le moment de cette force s'écrit :

$$d^2P = -dF_1z = -\dot{\psi}^2 yzdm \tag{1.78}$$

Le moment s'integre sur toute la section du profil. Il est préférable de changer de repère et se placer dans le repère  $\mathcal{T}_P$  qui constitue les axes propres du tenseur d'inertie.

En notant y' et z' les coordonnées du point dans le repère  $\mathcal{T}_P$ , on obtient :

$$y = y' \cos \theta_B - z' \sin \theta_B \tag{1.79}$$

$$z = y' \sin \theta_B + z' \cos \theta_B \tag{1.80}$$

Soit:

$$yz = (\cos^2 \theta_B - \sin^2 \theta_B)y'z' + \sin \theta_B \cos \theta_B(y'^2 - z'^2)$$
 (1.81)

En notant  $\rho$  la densité du matéiaux consituant la pale, la masse élementaire s'exprime par :

$$dm = \rho dr dy' dz' \tag{1.82}$$

L'intégrale du produit y'z' est nulle puisque le repère  $\mathcal{T}_P$  est un repère principal d'inertie. En se limitant au premier ordre en  $\theta_B$ , et en intégrant sur la surface du profil on obtient :

$$dP = -\dot{\psi}^2 \theta_B dr \int_S (y'^2 - z'^2) \rho dy' dz'$$
 (1.83)

Notons  ${\cal I}_z$  et  ${\cal I}_y$  les moments quadratiques de la section de la pale. Nous obtenons :

$$dP = -\dot{\psi}^2 \theta_B (I_z - I_y) \rho dr \tag{1.84}$$

Nous avons:

$$I_z = \int_S y'^2 dy' dz' \tag{1.85}$$

$$I_y = \int_S z'^2 dy' dz' \tag{1.86}$$

D'autre part les moments d'inerties s'écrivent :

$$I_{zz} = \int_{\mathcal{D}} (y'^2 + r^2) \rho dr dy' dz'$$
 (1.87)

$$I_{yy} = \int_{\mathcal{P}} (y'^2 + r^2) \rho dr dy' dz'$$
 (1.88)

On déduit :

$$I_{zz} - I_{yy} = \int_{\mathcal{P}} (y'^2 - z'^2) \rho dr dy' dz' = \int_0^R (I_z - I_y) \rho dr$$
 (1.89)

Soit:

$$I_{zz} - I_{yy} = (I_z - I_y)\rho R$$
 (1.90)

En introduisant la variable x, on obtient finalement l'expression du moment :

$$dP = -\dot{\psi}^2 (I_{zz} - I_{yy})\theta_B dx \tag{1.91}$$

#### 1.4.3 Calcul du moment dû à l'inertie de torsion

Le moment d'inertie de pas étant  $I_{zz}-I_{yy}$  (voir équation (1.16)), le moment d'inertie s'exprime par :

$$-\left(I_{zz} - I_{yy}\right) \frac{d^2\theta_B}{dt^2} \tag{1.92}$$

Nous verrons que ce moment est négligeable devant les deux précédents. Il ne sera donc pas pris en compte.

## 1.5 Tableau récapitulatif des forces et moments

On obtient finalement le tableau récapitulatif suivant :

$$\theta_B = \theta_0 + x\theta_{TW} + \nu(x) \tag{1.93}$$

$$dL = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho a c R(\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dx & \text{si } U_T > 0\\ -\frac{1}{2} \rho a c R(\theta_B U_T^2 + U_P U_T) dx & \text{si } U_T < 0 \end{cases}$$
 (1.94)

$$dH_P = \frac{1}{2}\rho \delta c R U_T^2 \sin \psi dx \tag{1.95}$$

$$dH_{I} = -\frac{1}{2}\rho acR((\theta_{B}U_{T}^{2} + U_{P}U_{T})\beta\cos\psi + (\theta_{B}U_{P}U_{T} + U_{P}^{2})\sin\psi)dx \quad (1.96)$$

$$dY_P = -\frac{1}{2}\rho\delta cRU_T^2\cos\psi dx \tag{1.97}$$

$$dY_{I} = \frac{1}{2}\rho acR(-(\theta_{B}U_{T}^{2} + U_{P}U_{T})\beta\sin\psi + (\theta_{B}U_{P}U_{T} + U_{P}^{2})\cos\psi)dx \qquad (1.98)$$

$$dQ_{P} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho\delta cR^{2}xU_{T}^{2}dx & \text{si } U_{T} > 0\\ \frac{1}{2}\rho\delta cR^{2}xU_{T}^{2}dx & \text{si } U_{T} < 0 \end{cases}$$
(1.99)

$$dQ_{I} = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho acR^{2}x(\theta_{B}U_{P}U_{T} + U_{P}^{2})dx & \text{si } U_{T} > 0\\ -\frac{1}{2}\rho acR^{2}x(\theta_{B}U_{P}U_{T} + U_{P}^{2})dx & \text{si } U_{T} < 0 \end{cases}$$
(1.100)

$$dM = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho acR^{2}x(\theta_{B}U_{T}^{2} + U_{P}U_{T})dx & \text{si } U_{T} > 0\\ -\frac{1}{2}\rho acR^{2}x(\theta_{B}U_{T}^{2} + U_{P}U_{T})dx & \text{si } U_{T} < 0 \end{cases}$$
(1.101)

$$dN = \frac{1}{2}\rho c^2 R[U_T^2(C_m + \frac{la}{c}\theta_B) + \frac{la}{c}U_P U_T)]dx$$
 (1.102)

$$dP = -\dot{\psi}^2 (I_{zz} - I_{yy})\theta_B dx \tag{1.103}$$

## 1.6 Intégration des forces et moments

L'expression analytique des forces et des moments des b pales s'obtient en intégrant les expressions élémentaires des forces et moments (équations ci-dessus (1.94) à (1.103)) une première fois le long de la pale et une deuxième fois en azimut de 0 à  $2\pi$ .

On introduit un paramètre noté B qui modélise les pertes de portance de bout de pale du fait que la pale est de longueur finie. La valeur de B suggéré par Prandtl est donné par la relation :

$$B = 1 - \frac{c}{2R} \tag{1.104}$$

 $C_T$  est le coefficient normalisé de la résultante rotorique axiale (voir paragraphe 1.9). Dans la plupart des analyses ont prend pour simplifier la valeur B = 0.97.

Pour calculer les forces et moments, on distingue les composantes de profil et les composantes induites par la portance. On intègre les composantes induites par la portance en prenant en compte le facteur de perte selon l'équation :

$$F_I = \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^B \frac{dF_I}{dx} dx d\psi \tag{1.105}$$

On intègre les composantes de traînées en considérant toute l'étendue de la pale car la traînée persiste même quand la portance disparait :

$$F_{P} = \frac{b}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \frac{dF_{P}}{dx} dx d\psi$$
 (1.106)

Pour prendre en compte le changement de signe des équations sur l'étendue du cercle d'inversion, on distingue dans l'intégration en azimuth la zone avançante de la zone reculante. En prenant par exemple la résultante rotorique, on obtient :

$$T = \frac{b}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} \int_0^B \frac{dT}{dx} dx d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} \left( -\int_0^{-\mu \sin \psi} \frac{dT}{dx} dx + \int_{-\mu \sin \psi}^B \frac{dT}{dx} dx \right) d\psi \right)$$
 (1.107)

Cette expression peut également s'écrire :

$$T = \frac{b}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^B \frac{dT}{dx} dx d\psi - 2 \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{-\mu \sin \psi} \frac{dT}{dx} dx d\psi \right)$$
 (1.108)

Les expressions analytiques des forces et moments après intégration s'expriment sous la forme de polynomes en  $\mu$ . On montre (voir [2]) qu'une evaluation à l'ordre 4 en fonction de  $\mu$  suffit si  $a_0, a_2$  et  $b_2$  sont exprimés à l'ordre 2 et  $a_1$  et  $b_1$  à l'ordre 3. La référence [3] montre que la même précision est obtenue pour les forces et moments si  $u_0$  est évalué à l'ordre 4,  $u_1$  et  $v_1$  à l'ordre 3 et  $u_2$  et  $v_2$  à l'ordre 2. Les forces et moments seront donc calculés en limitant le developpement en fonction de  $\mu$  à l'ordre 4 (voir annexe).

#### 1.7 Etude du battement

Le calcul du battement consiste à exprimer l'équation différentielle qui régit le mouvement en  $\beta$ . Pour cela calculons le moment cinétique au point S de la pale  $\mathcal{P}$  par rapport au repère  $\mathcal{T}_I$ . Nous avons :

$$\vec{\sigma}(S, \mathcal{P}/\mathcal{T}_I) = I(S, \mathcal{P})\vec{\Omega}(\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_I) \tag{1.109}$$

Soit:

$$\vec{\sigma}(S, \mathcal{P}/\mathcal{T}_I) = \begin{pmatrix} (I_{zz} - I_{xx})(\beta \dot{\psi} + q \sin \psi - p \cos \psi) \\ I_{yy}(-\dot{\beta} + q \cos \psi + p \sin \psi) \\ I_{zz}\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_B}$$
(1.110)

Calculons à présent le moment dynamique en S de la pale  $\mathcal{P}$  par rapport au repère  $\mathcal{T}_S$ . Celui-ci est égal à la dérivée du moment cinétique par rapport à ce même repère. Le théorème de Varignon permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(S, \mathcal{P}/\mathcal{T}_I)\bigg|_{\mathcal{T}_I} = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}(S, \mathcal{P}/\mathcal{T}_I)\bigg|_{\mathcal{T}_B} + \vec{\Omega}(\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_I) \wedge \vec{\sigma}(S, \mathcal{P}/\mathcal{T}_I)$$
(1.111)

La coordonnée Y du premier terme du second membre de cette equation donne :

$$-I_{yy}(\ddot{\beta} + q\dot{\psi}\sin\psi - p\dot{\psi}\cos\psi) \tag{1.112}$$

La coordonnée Y du deuxième terme donne :

$$-I_{yy}(\beta\dot{\psi}^2 + q\dot{\psi}\sin\psi - p\dot{\psi}\cos\psi) \tag{1.113}$$

On obtient finalement la coordonnée Y du moment dynamique :

$$-I_{m}(\ddot{\beta} + \beta\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}q\sin\psi - 2\dot{\psi}p\cos\psi) \tag{1.114}$$

Le second principe fondamental de la dynamique stipule que le moment dynamique est égal au moment des forces extérieures. En reliant cette dernière équation à l'expression du moment aérodynamique précédemment calculés sur l'axe  $\vec{Y}_B$  et en l'intégrant le long de la pale nous obtenons l'équation différentielle du mouvement en battement :

$$I_{yy}(\ddot{\beta} + \beta \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}q\sin\psi - 2\dot{\psi}p\cos\psi) = \int_0^B dM$$
 (1.115)

Remarquons que le terme  $I_{yy}\ddot{\beta}$  est la force d'inertie de la pale et le terme  $I_{yy}\beta\dot{\psi}^2$  la force de rappel centrifuge.

Pour intégrer  $\beta$  on utilise comme variable libre l'azimut au lieu du temps. On obtient donc au final :

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \beta + 2\hat{q}\sin\psi - 2\hat{p}\cos\psi = \frac{1}{I_{yy}\dot{\psi}^2} \int_0^B dM$$
 (1.116)

On introduit le nombre de Lock défini par :

$$\gamma = \frac{\rho a c R^4}{I} \tag{1.117}$$

Ce nombre sans dimension caractérise le rapport des forces aérodynamiques aux forces d'inerties. En remplaçant les vitesses  $U_T, U_P$  par leurs expressions et en intégrant l'équation du moment dM le long de la pale on obtient l'équation différentielle du battement.

L'expression de dM dépend comme nous l'avons vu du signe de  $U_T$ . Nous avons :

$$\int_{0}^{B} dM = \int_{0}^{B} \frac{1}{2} \rho a c R^{2} x (\theta_{B} U_{T}^{2} + U_{P} U_{T}) dx - 2 \int_{0}^{-\mu \sin \psi} \frac{1}{2} \rho a c R^{2} x (\theta_{B} U_{T}^{2} + U_{P} U_{T}) dx \bigg]_{\pi}^{2\pi}$$
(1.118)

L'expression  $]_{\pi}^{2\pi}$  signifiant que ce terme n'est pris en compte que lorsque  $\psi$  varie de  $\pi$  à  $2\pi$ . Dans le but d'obtenir une seule expression du moment dans l'intervalle  $[0\dots 2\pi]$  il nous faut calculer les coefficient de Fourrier d'une fonction définie sur deux intervalles, le premiere de  $[0\dots \pi]$  et la deuxième de  $[\pi\dots 2\pi]$ . Soit une serie de Fourier définie de  $[0\dots 2\pi]$  par :

$$y = A_0 + A_1 \cos \psi + B_1 \sin \psi + A_2 \cos 2\psi + B_2 \sin \psi \tag{1.119}$$

On additionne à cette série sur l'intervalle  $[\pi \dots 2\pi]$  une série de la forme :

$$\Delta y = \Delta A_0 + dA_1 \cos \psi + \Delta B_1 \sin \psi + \Delta A_2 \cos 2\psi + \Delta B_2 \sin \psi \qquad (1.120)$$

L'analyse harmonique de la somme de ces deux séries conduit à une série dont les coefficients sont (voir annexe) :

$$y + \Delta y = C_0 + C_1 \cos \psi + D_1 \sin \psi + C_2 \cos 2\psi + D_2 \sin \psi \tag{1.121}$$

Avec:

$$\Delta a_2 = -\Delta a_0 \tag{1.122}$$

$$\Delta a_1 = 0 \tag{1.123}$$

$$C_0 = A_0 - \frac{\Delta B_1}{\pi} + \frac{1}{2} \Delta A_0 \tag{1.124}$$

$$C_1 = A_1 - \frac{4\Delta B_2}{3\pi} \tag{1.125}$$

$$D_1 = B_1 - \frac{8\Delta A_0}{3\pi} + \frac{1}{2}\Delta B_1 \tag{1.126}$$

$$C_2 = A_2 - \frac{1}{2}\Delta A_0 + \frac{2\Delta B_1}{\pi} \tag{1.127}$$

$$D_2 = B_2 + \frac{1}{2}\Delta B_2 \tag{1.128}$$

Les deux premières équations résultent de la continuité en  $\pi$  des deux séries. L'expression analytique du moment de battement étant relativement longue, elle ne sera pas détaillée dans ce chapitre. On la trouvera dans l'annexe.

Intéressons nous à présent à l'équation différentielle homogène du battement (donc sans second membre). Celle-ci s'exprime dans le cas B=1:

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \frac{\gamma}{8} (1 + \frac{4}{3}\mu \sin\psi) \frac{d\beta}{d\psi} + \left[1 + \frac{\gamma}{8} (\frac{4}{3}\mu \cos\psi + \mu^2 \sin 2\psi))\right] \beta = 0$$
 (1.129)

On remarque qu'en plus des forces d'inerties, les forces aérodynamiques font apparaître :

- un terme d'amortissement :  $\frac{\gamma}{8}(1 + \frac{4}{3}\mu\sin\psi)$ ;
- une force de rappel :  $\frac{\gamma}{8}(\frac{4}{3}\mu\cos\psi + \mu^2\sin2\psi)$

Cette équation est fondamentale car elle régit le mouvement de battement et une attention toute particulière a été porté à sa stabilité. Cette équation n'admet pas de solution générale mais les études montrent que des instabilités apparaissent uniquement pour des valeurs de  $\mu$  élevées.

Dans les domaines de vol courant le coefficient  $\mu$  étant petit devant 1, il peut être négligé. L'équation du battement se résume alors à :

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \frac{\gamma}{8} \frac{d\beta}{d\psi} + \beta = 0 \tag{1.130}$$

En revenant au temps comme variable libre au lieu de l'azimut, cette équation devient :

$$\frac{1}{\dot{\psi}^2} \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \frac{\gamma}{8\dot{\psi}} \frac{d\beta}{dt} + \beta = 0 \tag{1.131}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre aux coefficients constants qui représente un oscillateur harmonique. Le facteur d'amortissement

est 
$$\xi = \frac{\gamma}{16}$$
 et le temps de relaxation  $\tau = \frac{\gamma}{16\dot{\psi}}$ 

La valeur de ce dernier dépend exclusivement du nombre de Lock et de la vitesse de rotation. Les calculs donnent des valeurs de  $\tau$  comprises entre quelques centièmes de secondes pour des pales légères à un peu plus d'un dixième de seconde pour des pales lourdes. Le mouvement de battement est donc un mouvement fortement amorti.

Comme nous venons de le voir l'équation différentielle du battement n'admet pas de solution générale. Pour calculer le battement nous allons le décomposer en séries de Fourier en fonction de l'azimut. On pose :

$$\beta = a_0 - \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos(i\psi) - b_i \sin(i\psi))$$
 (1.132)

En se fixant un rang n et en introduisant l'expression de  $\beta$  ci-dessus dans l'équation du battement, on obtient une expression discrète comportant 2n+1 termes (n termes en  $\cos(i\psi)$ , n termes en  $\sin(i\psi)$  et le terme constant). Cette équation devant être nulle quelque soit  $\psi$ , on en déduit 2n+1 équations à 2n+1 inconnus (les coefficients du battement).

Les calculs montrent que l'amplitude des coefficients diminue d'un facteur 10 par ordre de calcul et que les coefficients d'ordre 2 sont de l'ordre du degré. Nous nous limiterons donc à l'ordre 2 pour développer les calculs dans cette étude.

Les coefficients fondamentaux sont  $a_0, a_1, b_1$  dont les significations physiques sont les suivantes :

- $a_0$  est la conicité;
- $a_1$  est ele basculement longitudinal (positif quand le rotor bascule vers l'arrière);
- $b_1$  est le basculement latéral (positif quand le rotor bascule vers la pale avançante).

Nous avons vu que le moment de battement s'exprime à partir de l'équation (1.115). En se limitant au premier ordre pour le calcul de l'angle  $\beta$ , soit :

$$\beta = a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi \tag{1.133}$$

On obtient:

$$\int_{0}^{B} dM = I\dot{\psi}^{2}(a_{0} + 2\hat{q}\sin\psi - 2\hat{p}\cos\psi)$$
 (1.134)

En l'absence de mouvement d'attitude ( $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  nuls), on conclue que le battement au premier ordre est constant et vaut  $I\dot{\psi}^2a_0$ .

## 1.8 Equation de déformation de torsion

Le calcul de la déformation s'obtient à partir de l'équation différentielle qui régit la déformation de torsion :

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{\mathcal{M}}{GJ} \tag{1.135}$$

Dans cette equation  $\nu$  est l'angle de torsion, GJ la rigidité de torsion de la poutre et  $\mathcal{M}$  la somme des moments des forces extérieures de r à R (convention des efforts à droite).

En se ramenant à la variable x, on obtient pour la pale :

$$\frac{d\nu(x)}{dx} = \frac{R\mathcal{M}}{GJ} \tag{1.136}$$

On déduit l'expression de la déformation sachant que le moment  $\mathcal{M}$  est la somme des moments de torsion des forces aérodynamiques et inertielles (voir paragraphe 1.4) :

$$\nu(x) = \int_0^x \left( \int_x^B dN + \int_x^1 dP \right) dx \tag{1.137}$$

Pour résoudre cette équation, on procède comme pour la résolution des coefficients de battement en décomposant  $\nu(x)$  en série de Fourier. On se limite à l'ordre 2 pour être homogène avec l'équation de battement et on pose donc :

$$\nu(x) = u_0(x) + u_1(x)\cos\psi + v_1(x)\sin\psi + u_2(x)\cos\psi + v_2(x)\sin\psi \quad (1.138)$$

On exprime enfin les coefficients ci-dessus sous la forme de polynome en x en se limitant à l'ordre 5, suffisamment précis en pratique (voir le paragraphe 1.8):

$$u_0(x) = u_{01}x + u_{02}x^2 + u_{03}x^3 + u_{04}x^4 + u_{05}x^5$$
(1.139)

$$u_1(x) = u_{11}x + u_{12}x^2 + u_{13}x^3 + u_{14}x^4 + u_{15}x^5$$
 (1.140)

$$v_1(x) = v_{11}x + v_{12}x^2 + v_{13}x^3 + v_{14}x^4 + v_{15}x^5$$
(1.141)

$$u_2(x) = u_{21}x + u_{22}x^2 + u_{23}x^3 + u_{24}x^4 + u_{25}x^5$$
 (1.142)

$$v_2(x) = v_{21}x + v_{22}x^2 + v_{23}x^3 + v_{24}x^4 + v_{25}x^5$$
(1.143)

L'identification des membres de gauche et de droite de l'équation (1.137) conduit à 25 équations dont les inconnues sont les coefficients de déformation.

#### 1.9 Resultats de calculs

On introduit le coefficient de plénitude (ou solidité) défini par :

$$s = \frac{bcR}{A} \tag{1.144}$$

Ce coefficient exprime le rapport entre la surface des pales et la surface du disque rotorique. On définit le coefficient de normalisation des forces par :

$$K_F = \rho s A R^2 \dot{\psi}^2 = \rho b c R^3 \dot{\psi}^2 \tag{1.145}$$

et celui des moments par :

$$K_Q = \rho s A R^3 \dot{\psi}^2 = \rho b c R^4 \dot{\psi}^2 \tag{1.146}$$

Les résultats d'intégration sont fournit en annexe. On ne précisera pas ici les expressions dépendant de la déformation qui sont trop longues a développer. La résolution analytique conduit au coefficients de battement suivant :

$$a_{0} = \frac{\gamma}{2} \left\{ \left( \frac{1}{6} \mu B^{3} - \frac{5}{48} \frac{\mu^{4}}{\pi} \right) \hat{p} + \left( \frac{1}{3} B^{3} + \frac{1}{4} \frac{\mu^{3}}{\pi} \right) \lambda + \frac{1}{8} \mu^{2} B^{2} b_{2} \right. \\ + \left( \frac{1}{4} B^{4} \mu^{2} - \frac{1}{32} \mu^{4} + \frac{1}{4} B^{4} \right) \theta_{0} + \left( \frac{1}{6} \mu^{2} B^{3} + \frac{1}{5} B^{5} \right) \theta_{TW} \right\}$$

$$a_{1} = \frac{2\mu}{B^{4} - \frac{1}{2} \mu^{2} B^{2}} \left\{ \left( \frac{B^{4}}{2\mu} + \frac{5}{48} \mu^{3} \right) \hat{p} - \frac{8\hat{q}}{\gamma \mu} + \left( B^{2} - \frac{1}{4} \mu^{2} \right) \lambda \right.$$

$$- \frac{1}{3} B^{3} b_{2} + \left( \frac{4}{3} B^{3} + \frac{\mu^{3}}{3\pi} \right) \theta_{0} + B^{4} \theta_{TW} \right\}$$

$$b_{1} = \frac{4\mu}{B^{4} + \frac{1}{2} \mu^{2} B^{2}} \left\{ -\frac{4\hat{p}}{\gamma \mu} - \frac{1}{4} \frac{B^{4}}{\mu} \hat{q} + \frac{1}{6} B^{3} a_{2} + \left( \frac{1}{3} B^{3} + \frac{1}{9} \frac{\mu^{3}}{\pi} \right) a_{0} \right\}$$

$$a_{2} = \frac{\gamma \mu^{2}}{\gamma^{2} B^{8} + 144} \left\{ -\frac{20}{3} B^{3} \frac{\hat{p}}{\mu} + \left( -\frac{128}{B\gamma} - \frac{1}{3} B^{7} \gamma \right) \frac{\hat{q}}{\mu} \right.$$

$$+ \left( 16B + \frac{7}{108} B^{9} \gamma^{2} \right) \lambda + \left( \frac{46}{3} B^{2} + \frac{7}{144} \gamma^{2} B^{10} \right) \theta_{0}$$

$$+ \left( \frac{7}{180} B^{11} \gamma^{2} + 12 B^{3} \right) \theta_{TW} \right\}$$

$$b_{2} = -\frac{\gamma^{2} \mu^{2}}{\gamma^{2} B^{8} + 144} \left\{ \left( \frac{128}{B\gamma^{2}} + \frac{1}{3} B^{7} \right) \frac{\hat{p}}{\mu} - \frac{20}{3} \frac{B^{3}}{\gamma} \frac{\hat{q}}{\mu} \right.$$

$$+ \frac{5}{9} B^{5} \lambda + \frac{25}{36} B^{6} \theta_{0} + \frac{8}{15} B^{7} \theta_{TW} \right\}$$

$$(1.151)$$

A partir des composantes des forces, on définit les coefficients suivant (on

remarquera que  $Y_p$  étant nul, il n'y a pas de coefficient  $C_{Yp}$ ):

$$T = K_F C_T \tag{1.152}$$

$$H_p = K_F C_{Hp} \tag{1.153}$$

$$H_i = K_F C_{Hi} \tag{1.154}$$

$$Y_i = K_F C_{Yi} \tag{1.155}$$

$$Q_p = K_Q C_{Qp} \tag{1.156}$$

$$Q_i = K_Q C_{Qi} \tag{1.157}$$

On obtient (voir annexe):

$$C_T = \frac{a}{2} \left\{ \left( -\frac{1}{16} \mu^3 + \frac{1}{4} B^2 \mu \right) \hat{p} + \left( \frac{1}{4} \mu^2 + \frac{1}{2} B^2 \right) \lambda + \frac{1}{8} \mu^3 a_1 + \frac{1}{4} B \mu^2 b_2 \right. \\ + \left( -\frac{4}{9} \frac{\mu^3}{\pi} + \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{2} B \mu^2 \right) \theta_0 + \left( \frac{1}{4} B^4 - \frac{1}{32} \mu^4 + \frac{1}{4} B^2 \mu^2 \right) \theta_{TW} \right\}$$
 (1.158)

$$C_{Hp} = \frac{1}{4}\delta\mu\tag{1.159}$$

$$C_{Hi} = \frac{a}{2} \{ (-\frac{1}{2}B^{2}\lambda - \frac{1}{6}B^{3}\theta_{0} - \frac{1}{8}B^{4}\theta_{TW} + \frac{5}{12}B^{3}b_{2} - \frac{1}{16}B^{2}\mu a_{1})\hat{p}$$

$$+ (-\frac{1}{6}B^{3}a_{0} + \frac{5}{12}B^{3}a_{2} - \frac{1}{16}B^{2}\mu b_{1})\hat{q}$$

$$+ (\frac{3}{4}B^{2}a_{1} - \frac{1}{2}B\theta_{0}\mu - \frac{1}{4}B\mu b_{2} - \frac{1}{4}B^{2}\mu\theta_{TW})\lambda$$

$$+ (\frac{1}{3}B^{3}a_{1} + \frac{3}{8}B^{2}\mu b_{2})\theta_{0} + (\frac{1}{4}B^{4}a_{1} + \frac{1}{4}B^{3}\mu b_{2})\theta_{TW}$$

$$+ (-\frac{1}{6}B^{3}b_{1} - \frac{1}{2}B^{2}\mu a_{2})a_{0}$$

$$+ \frac{1}{4}B^{2}\mu a_{0}^{2} + \frac{1}{4}B^{2}\mu a_{1}^{2} - \frac{1}{4}B^{3}b_{2}a_{1} + \frac{1}{4}B^{3}b_{1}a_{2} \}$$

$$(1.160)$$

$$C_{Yi} = \frac{a}{2} \left\{ \left( -\frac{1}{6}B^3 a_0 - \frac{5}{12}B^3 a_2 + \frac{5}{16}B^2 \mu b_1 \right) \hat{p} \right.$$

$$+ \left( \frac{1}{6}B^3 \theta_0 + \frac{1}{8}B^4 \theta_{TW} + \frac{1}{2}B^2 \lambda + \frac{5}{12}B^3 b_2 + \frac{7}{16}B^2 \mu a_1 \right) \hat{q}$$

$$+ \left( \frac{3}{4}B^2 b_1 + \frac{1}{4}B\mu a_2 - \frac{3}{2}B\mu a_0 \right) \lambda$$

$$+ \left( \frac{1}{3}B^3 b_1 + \frac{1}{2}B\mu^2 b_1 - \frac{3}{8}B^2 \mu a_2 - \frac{3}{4}B^2 \mu a_0 \right) \theta_0$$

$$+ \left( \frac{1}{4}B^4 b_1 + \frac{1}{4}B^2 \mu^2 b_1 - \frac{1}{4}B^3 \mu a_2 - \frac{1}{2}B^3 \mu a_0 \right) \theta_{TW}$$

$$+ \left( \frac{1}{6}B^3 a_1 - B\mu^2 a_1 - \frac{1}{2}B^2 \mu b_2 \right) a_0$$

$$+ \left( \frac{1}{4}B^3 a_2 + \frac{1}{4}B^2 \mu b_1 \right) a_1 + \frac{1}{4}B^3 b_1 b_2 \right\}$$

$$(1.161)$$

$$C_{Qp} = \frac{1}{64}\delta\{-8 - 8\mu^2 + \mu^4\}$$
 (1.162)

$$C_{Qi} = \frac{a}{2} \left\{ \left( -\frac{5}{64} \mu^4 + \frac{1}{8} B^4 \right) \hat{p}^2 \right.$$

$$+ \left( -\frac{4}{45} \frac{\mu^4 \theta_0}{\pi} + \frac{1}{8} B^4 \mu \theta_{TW} + \frac{1}{6} B^3 \mu \theta_0 + \frac{1}{6} B^3 \mu b_2 - \frac{1}{4} B^4 a_1 + \frac{1}{4} \mu^3 \lambda \right) \hat{p}$$

$$+ \left( -\frac{1}{64} \mu^4 + \frac{1}{8} B^4 \right) \hat{q}^2 + \left( \frac{8}{45} \frac{\mu^4 a_0}{\pi} + \frac{1}{6} B^3 \mu a_2 - \frac{1}{3} B^3 \mu a_0 + \frac{1}{4} B^4 b_1 \right) \hat{q}$$

$$+ \left( \frac{1}{2} B^2 - \frac{1}{4} \mu^2 \right) \lambda^2$$

$$+ \left( \frac{1}{32} \mu^4 \theta_{TW} + \frac{1}{2} B^2 \mu a_1 + \frac{1}{4} B^4 \theta_{TW} + \frac{1}{3} B^3 \theta_0 + \frac{2}{9} \frac{\mu^3 \theta_0}{\pi} - \frac{3}{8} \mu^3 a_1 \right) \lambda$$

$$+ \left( -\frac{1}{4} B^2 \mu^2 a_0 - \frac{1}{6} B^3 \mu b_1 + \frac{1}{2} B^4 a_2 \right) a_2$$

$$+ \left( \frac{1}{8} B^2 \theta_0 \mu^2 + \frac{1}{12} B^3 \mu^2 \theta_{TW} + \frac{1}{6} B^3 \mu a_1 + \frac{1}{2} B^4 b_2 \right) b_2$$

$$+ \left( \frac{1}{4} B^2 \mu^2 - \frac{1}{16} \mu^4 \right) a_0^2 + \left( \frac{1}{8} B^4 + \frac{3}{16} B^2 \mu^2 \right) a_1^2 + \left( \frac{1}{8} B^4 + \frac{1}{16} B^2 \mu^2 \right) b_1^2$$

$$- \frac{1}{3} B^3 \mu a_0 b_1 \right\}$$

$$(1.163)$$

# 1.10 Expressions des forces par rapport au disque rotor

Les forces ont été exprimées juqu'à présent dans le repère  $\mathcal{T}_S$  dont l'axe  $\vec{Z}_S$  constitue le moyeu et le plan  $(\vec{X}_S, \vec{Y}_S)$  le plan d'entraı̂nement. Nous avons vu que sous l'effet des forces aérodynamiques et inertielles le battement des pales décrit un mouvement dont l'équation au premier ordre est :

$$\beta = a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi \tag{1.164}$$

On déduit de ce mouvement que le rotor forme un cône d'angle  $a_0$ , bascule longitudinalement en arrière d'un angle  $a_1$  en tournant autour de  $\vec{X}_S$  et bascule latéralement vers la pale avançante d'un angle  $b_1$  en tournant autour de  $\vec{Y}_S$ .

Il est alors intéressant de considérer un nouveau repère noté  $\mathcal{T}_D$  obtenu à partir de  $\mathcal{T}_S$  et des rotations  $a_1$  et  $b_1$ . L'axe  $\vec{Z}_D$  de ce nouveau repère représente l'axe du cône que forme le rotor et le plan  $(\vec{X}_D, \vec{Y}_D)$  est défini par le saumon des pales. Ce plan est appelé plan du disque rotor.

La transformation de  $\mathcal{T}_S$  à  $\mathcal{T}_D$  s'écrit au premier ordre :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & a_1 \\ b_1 & -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{T}_S}$$
(1.165)

Cette matrice permet de calculer l'expression des forces dans le repère  $\mathcal{T}_D$ :

$$\begin{pmatrix} Y_D \\ -H_D \\ T_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & a_1 \\ b_1 & -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ -H \\ T \end{pmatrix}$$
(1.166)

Soit:

$$T_D = T \tag{1.167}$$

$$H_D = H - a_1 T (1.168)$$

$$Y_D = Y - b_1 T (1.169)$$

Les calculs montrent que les composantes  $H_D, Y_D$  sont très faibles comparées à T et que l'on peut donc considérer avec une très bonne approximation que la résultante des forces aérodynamiques générée par le rotor est alignée avec l'axe du cône formé par les pales.

L'incidence du disque rotorique s'écrit :

$$\alpha_D = \alpha_S + a_1 \tag{1.170}$$

Calculons à présent les coefficients d'avancement et de perméabilité dans ce nouveau repère. Nous avons :

$$\mu_D = \frac{U\cos(\alpha_S + a_1)}{R\dot{\psi}} = \frac{U\cos\alpha_S}{R\dot{\psi}} \tag{1.171}$$

$$\lambda_D = \frac{U\cos(\alpha_S + a_1)}{R\dot{\psi}} - v_i = \frac{U\sin\alpha_S + Ua_1\cos\alpha_S}{R\dot{\psi}} - v_i \tag{1.172}$$

Soit:

$$\mu_D = \mu \tag{1.173}$$

$$\lambda_D = \lambda + \mu a_1 \tag{1.174}$$

## 1.11 Calcul de la polaire rotorique

Pour calculer les coefficients  $C_D$  et  $C_L$  du rotor il nous faut calculer la portance L et la traînée D. Ces deux forces s'expriment directement en fonction de T et H. Nous avons :

$$L = T\cos\alpha_S - H\sin\alpha_S \tag{1.175}$$

$$D = T\sin\alpha_S + H\cos\alpha_S \tag{1.176}$$

On déduit alors :

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho AU^2} , C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho AU^2}$$

#### 1.12 Calcul de la vitesse induite

La vitesse induite est la vitesse communiquée aux molécules d'air du fait de l'apparition des forces rotoriques. Pour calculer cette vitesse, nous ferons les hypothèses suivantes :

- la force générée par le rotor est uniformément distribuée à travers le disque rotor. Cette distribution uniforme revient à considérer un nombre infini de pale (la solidité vaut un);
- il y a continuité du flux d'air qui traverse le rotor ce qui conduit à la continuité des vitesses des molécules d'air mais à l'apparition d'une discontinuité de pression nécessaire à la génération de la force rotorique.

Nous considérerons donc que :

- la pression varie de  $p_0$  à p dans la partie aval (elle augmente) et de  $p+\Delta p$  à  $p_0$  dans la partie amont (elle diminue);
- la vitesse de l'air par rapport au rotor varie de  $\vec{V}$  à  $\vec{V}_2$  entre l'infini aval et l'infini amont et vaut  $\vec{V}_1$  au niveau du disque rotor.

Considérons le mouvement général de translation représenté par la figure 1.9.

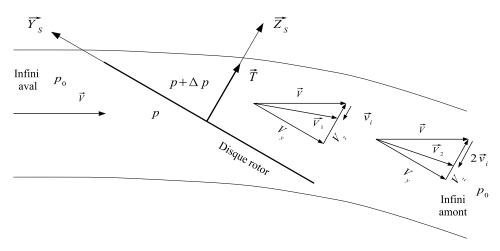


FIGURE 1.9 – Flux en translation horizontale

On définit la vitesse induite par la relation :

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \vec{v}_i \tag{1.177}$$

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement. Nous avons :

$$\dot{m}\vec{V} = \vec{T} + \dot{m}\vec{V}_2 \tag{1.178}$$

Soit:

$$\vec{T} = -\dot{m}(\vec{V}_2 - \vec{V}) \tag{1.179}$$

Calculons le bilan de puissance :

$$\frac{1}{2}\dot{m}V^2 = \vec{T}.\vec{V}_1 + \frac{1}{2}\dot{m}V_2^2 \tag{1.180}$$

Soit:

$$-\vec{T}.(\vec{V}+\vec{v}_i) = \frac{1}{2}\dot{m}(V_2^2 - V^2)$$
 (1.181)

En reportant l'expression de la force calculée précédemment nous obtenons :

$$\dot{m}(\vec{V}_2 - \vec{V}).(\vec{V} + \vec{v}_i) = \frac{1}{2}\dot{m}(\vec{V}_2 - \vec{V}).(\vec{V}_2 + \vec{V})$$
(1.182)

Soit:

$$\vec{V}_2 - \vec{V} = 2\vec{v}_i \tag{1.183}$$

La force rotorique T s'exprime alors par :

$$\vec{T} = -2\dot{m}\vec{v}_i \tag{1.184}$$

La vitesse induite est alignée avec la force générée par le rotor et de sens opposée. Il ne reste plus qu'à calculer le débit d'air. Glauert (voir note [1]) a suggéré qu'il ne faut pas considérer le flux d'air qui traverse le rotor mais l'expression suivante :

$$\dot{m} = \rho A |\vec{V}_1| = \rho A |\vec{V} + \vec{v}_i|$$
 (1.185)

Il n'y a égalité que dans le cas d'un mouvement vertical. On déduit finalement les résultats : connaissant la force  $\vec{T}$  générée par le rotor et la vitesse  $\vec{V}$  à l'infini aval on a les relations :

$$\vec{T} = -2\rho A |\vec{V} + \vec{v_i}| \vec{v_i} \tag{1.186}$$

$$\vec{V}_1 = \vec{V} - \vec{v}_i \tag{1.187}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V} - 2\vec{v}_i \tag{1.188}$$

La vitesse induite ainsi calculée est appelée vitesse induite de Froude.

Notons  $\vec{v}_i$  tel que  $\vec{v}_i = -v_i \vec{Z}_S$ . Notons T tel que  $\vec{T} = T\vec{Z}_S$ . La relation vectorielle donnant l'expression de la force se transforme en l'expression algébrique suivante :

$$T = 2\rho A|\vec{V} + \vec{v}_i|v_i \tag{1.189}$$

Soit  $V_Z$  la composante de la vitesse de l'air suivant  $\vec{Z}_S$  provenant du mouvement de translation de l'aéronef. La vitesse axiale des filet d'air au niveau du disque rotor est :

$$V_{Z1} = V_Z - v_i \tag{1.190}$$

A l'infini aval, nous avons:

$$V_{Z2} = V_Z - 2v_i (1.191)$$

Ces deux expressions montrent que la vitesse axiale varie de  $V_Z$  à l'infini aval à  $V_Z - 2v_i$  à l'infini amont en passant par  $V_Z - v_i$  au niveau du disque rotor. On peut alors prédire que l'écoulement ne sera pas le même suivant le sens et le module de  $V_Z$ .

On considère quatre cas de fonctionnement :

- La descente rapide quand  $V_Z > 2v_i$ . Les filets d'air sont tous dirigées dans le sens de l'axe  $\vec{Z}_S$ . Ce régime correspond à celui du moulinet frein ;
- La descente modérée quand  $v_i < V_Z < 2v_i$ . Il y a inversion du sens des vitesses à l'amont du disque ce qui fait apparaître un sillage de sorte que les filets au centre dirigés vers le haut se rabattent vers le bas à l'extrémité des pales. Ce mode de fonctionnement porte le nom de régime turbulent;

- La descente faible quand  $V_Z < v_i$ . Le sillage apparaît cette fois à la partie inférieure du rotor. Les filets d'air au centre du rotor se rabattent vers le bas ce qui conduit les filets centraux supérieurs à créer une zone tourbillonnaire d'où le nom d'état d'anneaux tourbillonnaire donné à ce régime;
- La montée quand  $V_Z < 0$ . Il correspond au fonctionnement d'une hélice.

En autorotation, le rotor fonctionne soit en moulinet frein, soit en régime turbulent. Nous montrerons au paragraphe 3.4 que le passe d'un régime à est indépendant de la vitesse et ne dépend que de l'incidence.

Notons enfin que l'on définit le régime d'autorotation idéale celui dans lequel  $V_Z = v_i$  ce qui conduit à  $V_{Z1} = 0$ .

Utilisons la vitesse de translation du rotor  $\vec{U}$  qui, par définition, est l'opposé de la vitesse  $\vec{V}$ . Nous avons :

$$\vec{U} = U \cos \alpha_S \vec{Y}_S - U \sin \alpha_S \vec{Z}_S \tag{1.192}$$

avec  $\alpha_S$  l'incidence du disque rotor positive dans le mode autogire. On pose :

$$U_y = U\cos\alpha_S\tag{1.193}$$

$$U_z = -U\sin\alpha_S\tag{1.194}$$

Posons  $v_{i0}$  la vitesse induite définie par :

$$v_{i0} = \sqrt{\frac{|T|}{2\rho A}} = \sqrt{\frac{sR^2\dot{\psi}^2 C_T}{2}}$$
 (1.195)

 $v_{i0}$  est la vitesse induite du vol stationnaire  $(\vec{V} = 0)$  qui génère la force T. On introduit alors les coefficients suivants :

$$\bar{v} = \frac{v_i}{v_{i0}} \tag{1.196}$$

$$\bar{\mu} = \frac{U_y}{v_{i0}} \tag{1.197}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{U_z}{v_{i0}} \tag{1.198}$$

avec:

- $\bar{v}$  la vitesse induite normalisée (positive vers le bas);
- $\bar{\mu}$  la vitesse d'avancement normalisée;
- $\bar{\lambda}$  la vitesse de descente normalisée (positive vers le haut).

 $\lambda$  par définition est négatif quand  $U_z$  est négatif c'est-à-dire quand l'incidence  $\alpha_S$  est positive (mode autogire). A l'opposé  $\bar{\lambda}$  est positif quand l'incidence est négative (mode hélicoptère).

On pose:

$$\eta = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} = \frac{U_z}{v_i} \tag{1.199}$$

Ce paramètre détermine le mode de fonctionnement du rotor que nous avons précédemment défini. En effet nous avons :

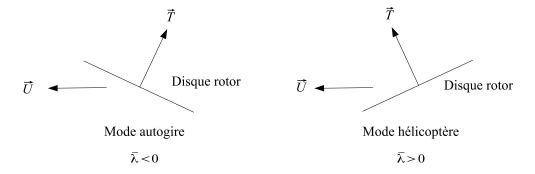


Figure 1.10 – Mode autogire et helicoptère

- $\bar{\eta} < -2$  soit  $V_z > 2v_i$  régime moulinet frein;
- $-2 < \bar{\eta} < -1$  soit  $v_i < V_z < 2v_i$  régime turbulant;
- $-1 < \bar{\eta} < 0$  soit  $0 < V_z < v_i$  état d'anneaux tourbillonnaires;
- $0 < \bar{\eta}$  soit  $V_z < 0$  mode hélice.

Le régime d'autorotation idéale est déterminé par  $\bar{\eta}=-1$  soit la droite  $\bar{\lambda}=-\bar{v}$ . Le passage du régime turbulent au régime moulinet frein est défini par la droite  $\bar{\lambda}=-2\bar{v}$ .

Nous ne nous intéresserons dans la suite qu'au cas  $T \geq 0$  correspondant à  $v_i \geq 0$  soit  $\bar{v} \geq 0$ . En effet la solution du cas T < 0 est  $-v_i$  avec  $v_i$  solution de -T.

Exprimons le module du vecteur  $\vec{V} + \vec{v_i}$ . On obtient :

$$|\vec{V} + \vec{v}_i|^2 = v_{i0}^2(\bar{\mu}^2 + (\bar{\lambda} + \bar{v})^2)$$
(1.200)

L'expression de la force T de la théorie de Froude conduit à la relation :

$$1 = \bar{v}\sqrt{\bar{\mu}^2 + (\bar{\lambda} + \bar{v})^2} \tag{1.201}$$

Cette expression ne donne pas de solution explicite. On peut cependant tracer  $\bar{v}$  à  $\bar{\mu}$  fixé en fonction de  $\bar{\lambda}$  en calculant  $\bar{\lambda}$  en fonction de  $\bar{v}$  ce qui conduit à une équation du second degré. On obtient deux familles de solution :

$$\bar{\lambda} = -\bar{v} \pm \sqrt{\frac{1}{\bar{v}^2} - \bar{\mu}^2} \tag{1.202}$$

Ces courbes sont représentées sur le schéma ci-dessous pour trois valeurs différentes de  $\bar{\mu}$ . Le schéma ci-dessous fait également apparaître les zones de fonctionnement en moulinet frein (intersection entre la valeur de  $\bar{v}$  et la pente  $\bar{\lambda} = -2\bar{v}$ ) et en mode hélice ( $\bar{\lambda} > 0$ ).

On remarque que pour  $\bar{\mu}=0$  la solution de Froude correspond à deux branches d'hyperboles admettant chacune la droite  $\bar{v}=-\bar{\lambda}$  comme asymptote. Cette droite, qui correspond à la vitesse idéale d'autorotation, joue également un rôle important quand  $\bar{\mu}\neq 0$  car les maxima des courbes  $\bar{v}=f(\bar{\lambda})$  se produisent sur cette droite.

Dans le cas d'une descente verticale ( $\bar{\mu}=0$ ) les résultats de la théorie de Froude comparés aux mesures expérimentales permettent de déterminer trois zones :

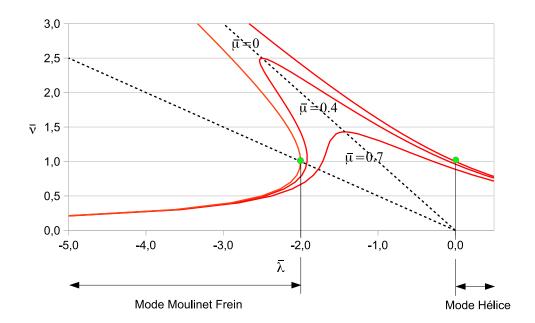


FIGURE 1.11 – Vitesse induite de Froude

- lorsque  $\bar{\lambda} \ge -1$  la branche de l'asymptote de droite est assez en accord avec les différentes expériences tout en minorants celle-ci;
- lorsque  $-2 \le \bar{\lambda} \le -1$  la vitesse induite diminue fortement jusqu'à rejoindre l'asymptote de gauche;
- lorsque  $\bar{\lambda} \leq -2$  les résultats expérimentaux suivent la branche de l'hyperbole en majorant celle-ci.

La théorie de Froude dans le cas d'un autogire ne peut donc plus s'appliquer dès que le fonctionnement du rotor s'approche du régime turbulent. Nous montrerons que c'est le cas dès que l'incidence dépasse 30 degrés.

Des modèles plus réalistes ont été élaborés dont notamment le modèle de Shaydakov basé sur la théorie des anneaux tourbillonnaires.

Ce modèle est abordé dans la note Ref. [4]. Il conduit à deux jeux d'équations :

• quand 
$$\bar{\eta} > 1$$
 alors  $1 = \bar{v}\sqrt{\bar{\mu}^2 + (\bar{\lambda} + \frac{\bar{v}}{2})^2}$ ;

• lorsque 
$$\bar{\eta} < 1$$
 alors  $1 = (\bar{\lambda} + \bar{v})\sqrt{\bar{\mu}^2 + (\bar{\lambda} + \bar{v})^2} - \bar{\lambda}\sqrt{\bar{\mu} + \frac{\bar{\lambda}^2}{4}}$ 

On remarque encore une fois l'importance de la droite définissant le régime d'autorotation idéale qui définit la transition entre les deux jeux d'équations.

Dans le cas  $\bar{\eta} > 1$  l'équation n'admet pas de solution explicite et on procède comme dans le cas de la théorie de Froudre pour tracer  $\bar{v}$  en fonction de  $\bar{\lambda}$  à  $\bar{\mu}$ 

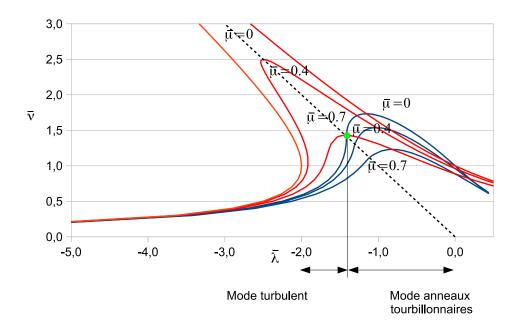


FIGURE 1.12 – Vitesse induite de Shaydakov

fixé. Dans le cas  $\bar{\eta} > 1$  on obtient :

$$\bar{v} = -\bar{\lambda} + \sqrt{\frac{-\bar{\mu}^2 + \sqrt{\bar{\mu}^4 + 4(1 + \bar{\lambda}\sqrt{\bar{\mu}^2 + \frac{\bar{\lambda}^2}{4}})}}{2}}$$
(1.203)

Le tracé de cette courbe montre que la valeur de  $\bar{v}$  obtenue pour  $\bar{\eta}=1$  est la valeur minimale. Elle s'obtient (voir l'équation ci-dessus) pour :

$$1 + \bar{\lambda}\sqrt{\bar{\mu}^2 + \frac{\bar{\lambda}^2}{4}} = 0 \tag{1.204}$$

Soit:

$$\bar{\lambda} = -\sqrt{2(\sqrt{\bar{\mu}^4 + 1} - \bar{\mu}^2)} \tag{1.205}$$

Cette dernière équation définit la transition de manière explicite entre les deux familles de courbes.

Le schéma de la figure 1.12 représente les modèles de Froude (en rouge) et de Shaydakov (en bleu). Le modèle de Shaydakov permet de distinguer la zone du régime turbulent de la zone d'anneaux tourbillonnaires.

#### 1.13 Codage des équations

Les équations analytiques exposées dans ce document ont été codées dans la bibliothèque GyroKit et donne lieu au logiciel GyroRotor qui calcule les caractéristiques aérodynamiques d'un rotor dans lequel la vitesse de rotation est imposée ou fonctionnant en auto-rotation.

L'expression de la vitesse induite  $v_i$  fait apparaître un couplage avec le coefficient de la force rotorique axiale  $C_T$ . Pour une vitesse de rotation donnée du rotor, on résout ce couplage en utilisant un algorithme itératif de type Newton (recherche du zéro d'une fonction).

Une difficulté apparaît lorsqu'on utilise le modèle de Froude pour de petits facteurs d'avancement. Dans l'intervale  $\bar{\lambda}=-2$  à  $\bar{\lambda}=-1$ , outre le fait que le modèle de Froude est incorrect, il apparaît une discontinuité dans la solution quand on passe d'une branche à l'autre de l'hyperbole. Cette discontinuité peut conduire à une non convergence de la force générée par le rotor. Dans cette région, il est nécessaire d'utiliser le modèle de Shaydakov.

Dans la programmation des équations, la définition de  $v_{i0}$  est légèrement différente de celle du paragraphe 1.7. Afin de toujours avoir  $\bar{v} \geq 0$ , nous avons pris :

$$v_{i0} = signe(T)\sqrt{\frac{|T|}{A}2\rho}$$
 (1.206)

Dans le cas du fonctionnement du rotor en auto-rotation, il faut déterminer de plus sa vitesse de rotation. Celle-ci est telle que le couple rotorique total  $C_{Qp} + C_{Qi}$  est nul. On utilise pareillement un algorithme de type Newton pour calculer cette vitesse de rotation.

On peut résumer ainsi l'algorithme de calcul dans le cas d'un fonctionnement en auto-rotation :

- itération sur la vitesse de rotation du rotor jusqu'à annulation du couple rotorique  $C_{Qp} + C_{Qi}$ ;
- itération sur la vitesse induite jusqu'à convergence de la force axiale  $C_T$ ;
- calcul des coefficients de déformation;
- calcul des coefficients de battement;
- calcul de  $C_T$ ;
- calcul de  $C_{Qp} + C_{Qi}$ .

Les coefficients de déformations sont calculés à partir de l'équation (1.137). Cette équation se ramène à un système linéaire de 25 équations à 25 inconnues qui est résolu numériquement.

#### 1.14 Revue des hypothèses

Les principales hypothèses prises en compte lors du développement des équations et qui limitent la porté des calculs sont :

- la vitesse induite est supposée constante sur toute la surface du disque rotor;
- la zone de décrochage de la pale reculante n'est pas prise en compte;
- le profil des pales est caractérisé par deux nombres constants : la traînée  $\delta$  et la pente du coefficient de portance a.

La première hypothèse a comme conséquence que les équation ne modélisent pas correctement le comportement du rotor dans la zone des anneaux tourbillonaires. La deuxième hypothèse concerne le calcul de la force de portane générée par l'élément de pale qui est supposé proportionnelle à la pente du  $C_L$  du profil. Ce calcul n'est valide que tant que l'angle d'incidence est inférieur à l'angle de décrochage du profil. En conséquence, le domaine de validité des calcul se réduit aux faibles valeurs du facteur d'avancement.

La dernière hypothèse concerne les paramètres modélisant la traînée et la pente de portance du profil. Ces paramètres doivent être considérés comme des paramètres d'ajustement. On pourra ainsi les modifier afin d'obtenir une portance et une vitesse de rotation données. En augmentant a on augmente les forces aérodynamiques générées par le rotor en changeant peu la vitesse de rotation. En augmentant  $\delta$  on diminue la vitesse de rotation et l'amplitude des forces aérodynamiques.

## Chapitre 2

# Caractéristiques remarquables d'un rotor en autorotation

Dans ce chapitre nous négligerons la déformation de torsion des pales. Considérons un rotor aux caractéristiques géométriques données définies par les paramètres  $R, c, \theta_0, \theta_{TW}, B, I_b, I_c, a, \delta$ .

#### 2.1 Variation de la vitesse à incidence constante

Supposons que pour pour une vitesse U et une incidence du disque  $\alpha_S$  données, les caractéristiques aérodynamiques de ce rotor soient :

$$\dot{\psi}, v_i, \mu, \lambda, a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, C_T, C_H, C_Y, T, H, Y$$
 (2.1)

Que deviennent ces valeurs pour une nouvelle vitesse à la même incidence? Notons kU cette nouvelle vitesse avec k un coefficient strictement positif. Montrons que la nouvelle solution s'écrit :

$$k\dot{\psi}, kv_i, \mu, \lambda, a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, C_T, C_H, C_Y, k^2T, k^2H, k^2Y$$
 (2.2)

Supposons que la vitesse de rotation du rotor soit multipliée par k.

L'expression de la vitesse induite  $v_{i0}$  (équation (1.195)) montre que celle-ci est multipliée par k quand la vitesse de rotation du rotor est multipliée par k. On en déduit à travers les équations (1.197) et (1.198) que les coefficients  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\lambda}$  sont inchangés. Pour que l'équation (1.201) soit respectée, il faut donc que  $\bar{v}$  soit inchangé. On en déduit à partir de l'équation (1.201) que la vitesse induite  $v_i$  est multiplié par k.

Les expressions des paramètres  $\mu, \lambda$  (equations (1.28) et (1.29)) montrent que ceux-ci sont inchangés quand on multiplie les vitesses  $U, \dot{\psi}, v_i$  par un même coefficient.

 $\mu$  et  $\lambda$  étant inchangés, les equations (1.147), (1.148), (1.149), (1.150) et (1.151) montrent que les coefficients de battements  $a_0, a_1, b_1, a_2$  et  $b_2$  restent inchangés.

Il en est de même du couple rotor total  $C_Q$  (équations (1.162) et (1.163)). Celui-ci reste donc nul et ainsi la nouvelle solution respecte bien la condition d'équilibre du régime d'autorotation.

Enfin la vitesse de rotation étant en facteur au carré dans l'expression des forces T, H, Y (voir équation (1.145)) on déduit que les valeurs de ces forces sont multipliées par le coefficient  $k^2$ .

Ainsi quand la vitesse de translation d'un rotor en autorotation est multipliée par un coefficient k alors que l'incidence du disque est inchangée :

- les coefficients  $\mu, \lambda, a_0, a_1, b_1, a_2, b_2$  sont inchangés;
- la vitesse du rotor  $\psi$  et la vitesse induite  $v_i$  sont multipliées par k;
- les forces aérodynamique T, H, Y sont multipliées par  $k^2$ .

Cette dernière propriété justifie la définition des coefficients  $C_D, C_L$  de la polaire rotorique.

Si l'on examine à présent le rapport  $\eta$  introduit lors du calcul de la vitesse induite :

$$\eta = -\frac{U\sin\alpha_S}{v_i} \tag{2.3}$$

on remarque que ce rapport est également indépendant de la vitesse.

Autrement dit, le mode de fonctionnement d'un rotor en autorotation (moulinet frein ou régime turbulent) est indépendant de la vitesse. Il ne dépend que de l'incidence.

#### 2.2 Etude du coefficient de perméabilité

Considérons un rotor aux pales non vrillées, infiniment rigides et en translation pure. Pour étudier les caractéristiques du coefficient de perméabilité, nous allons exprimer le couple rotorique sous une forme différente de celle de l'équation (1.163). Nous avons (voir la référence [6] page 102) :

$$Q_i = -(T\lambda + H_i\mu)R\tag{2.4}$$

Cette equation qui pouvait être attendue montre que le couple rotorique induit est le produit scalaire entre la résultant rotorique et le flux d'air qui traverse le rotor.

On déduit de cette expression l'expression du coefficient total du couple rotorique :

$$C_Q = \frac{\delta}{8}(1 + \mu^2 + \frac{\mu^4}{8}) - \lambda C_T - \mu C_{Hi}$$
 (2.5)

A partir de l'expression du coefficient  $C_{Hp}$  et en se plaçant dans le plan du rotor, on déduit :

$$C_Q = \frac{\delta}{8}(1 + 3\mu^2 + \frac{\mu^4}{8}) - \lambda_D C_T - \mu C_{HD}$$
 (2.6)

Les termes  $\mu^2$  et  $\mu^4$  petit devant 1 peut être négligé. Le calcul montre que  $C_{HD}$  est négligeable devant  $C_T$  étant donné que la force rotorique est pratiquement alignée avec l'axe du cône rotor. La condition d'autorotation s'écrit donc :

$$\frac{\delta}{8} - \lambda_D C_T = 0; (2.7)$$

A partir de l'expression de  $C_T$  donné par l'équation (1.158), on obtient en négligeant les puissance de  $\mu$  devant 1 et se plaçant dans le plan du rotor :

$$C_T = \frac{a}{2} \left(\frac{\theta_0}{3} + \frac{\lambda_D}{2}\right) \tag{2.8}$$

La condition d'autorotation s'écrit finalement :

$$\lambda_D = \frac{1}{3} (\sqrt{\theta_0^2 + \frac{9\,\delta}{2\,a}} - \theta_0) \tag{2.9}$$

Le coefficient de perméabilité exprimé dans l'axe du cône d'un rotor au profil des pales donnée est constant. Il ne dépend ni de la vitesse, ni de l'incidence

#### 2.3 Fonctionnement en mode autogire

L'expression de la portance du rotor est :

$$L = T\cos\alpha_S \tag{2.10}$$

En considérant que l'angle d'incidences est suffisamment petit de telle manière que  $\cos \alpha_S = 1$ , on obtient :

$$L = T (2.11)$$

Nous avons:

$$T = \rho b c R^3 \dot{\psi}^2 C_T \tag{2.12}$$

Notons W le poids de l'autogire et n facteur de charge qu'il subit. Nous avons par définition du facteur de charge :

$$n = \frac{T}{W} \tag{2.13}$$

A partir de la condition d'autorotation (equation (2.7)), on déduit :

$$\dot{\psi}^2 = 8 \frac{nW}{\rho R^3 bc\delta} \lambda_D \tag{2.14}$$

Soit:

$$\dot{\psi}^2 = \frac{8}{3} \frac{nW}{aR^3 bc\delta} \left[ \sqrt{\theta_0^2 + \frac{9\delta}{2a}} - \theta_0 \right]$$
 (2.15)

Ainsi pour de faibles valeurs d'incidence et au premier ordre, on déduit les propriétés suivantes :

Pour un facteur de charge donné, le carré de la vitesse de rotation du rotor est :

- indépendante de la vitesse et de l'incidence;
- inversement proportionnelle à la densité, la corde, le nombre de pale et le cube du rayon du disque.

La vitesse de rotation du rotor varie comme la racine carrée du facteur de charge.

### Chapitre 3

# Applications numériques

#### 3.1 Test de validation des fonctions analytiques

Un premier test de validation a consisté à vérifier le codage correct des équations en comparant le résultat de la bibliothèque GyroKit et les calculs du logiciel Maple. On utilise pour cela un rotor dont les caractéristiques sont les suivantes :

$\bullet$ Longueur des pales, $R$	4 m
$\bullet$ Masse de la pale, $M$	12  kg
$\bullet$ Corde du profil, $c$	$0.2 \mathrm{m}$
• Centre de gravité du profil ramené à la corde, $x_{ac}$	0.3
• Foyer du profil ramené à la corde, $x_{cq}$	0.278
• Nombre de pale, $b$	2
• Vrillage de la pale, $\theta_1$	$2 \deg$
• Coefficient de moment aérodynamique du profil, $C_m$	0.005
• Rigidité de torsion de la pale, $GJ$	$6350 \text{ N.m}^2/\text{rad}$

Le profil correspond à un NACA 8h12. La rigidité de torsion a été calculée sur des pales AVERSO à partir des résultats de la mesure suivante : une force de 100 N appliquée perpendiculairement à la pale à une distance d'un mètre à 3,81 m du pied de pale conduit à une flèche de 60 mm au point d'application de la force. On déduit de ces données :

- Le moment de torsion 100 N.m
- L'angle de torsion 0.03 rad.

L'équation de torsion s'écrit :

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = \frac{\mathcal{M}}{GJ} \tag{3.1}$$

Dans le cas d'un moment constant, celle-ci s'intègre en :

$$\nu(r) = \frac{\mathcal{M}}{GJ}r\tag{3.2}$$

d'où l'on déduit :

$$GJ = \frac{\mathcal{M}}{\nu(r)}r\tag{3.3}$$

En remplaçant par les données de la mesure : r = 3,81 m,  $\mathcal{M} = 100$  N.m,  $\nu(r) = 0.03$  rad, on obtient la valeur de rigidité de torsion mentionnée.

A partir des données du rotor, on calcule les moments d'inerties en supposant la masse linéique de la pale constante. On obtient :

- Moment d'inertie de battement,  $I_b = m \frac{R^2}{3} = 64 \text{ kg.m}^2$
- Moment d'inertie de traînée,  $I_c = I_b + m \frac{c^2}{12} = 64.04 \text{ kg.m}^2$

On simule alors le fonctionnement du rotor en auto-rotation dans les conditions suivantes :

• Vitesse de translation, U 90 km/h • Incidence,  $\alpha_S$  7 deg • Pas au pied de palle,  $\theta_0$  2 deg • Vitesse de tangage, q 2 deg/s • Vitesse de roulis, q -3 deg/s

On obtient après convergence :

• Vitesse de rotation du rotor,  $\dot{\psi}$  353.0027 rpm

• Facteur d'avancement,  $\mu$  0.1678124092350715 • Facteur de perméabilité  $\lambda$ , 0.013486848994919694

La saisie dans le logiciel Maple des caractéristiques du rotor ansi que les données de son point de fonctionnement  $(\dot{\psi}, \mu, \lambda)$  permet de comparer les résultats entre le logiciel Maple et la bibliothèque GyroKit et vérifier ainsi la cohérence entre le développement des équations et leurs codages (voir le code GlauertRotorTest.java).

On peut ensuite procéder à plusieurs tracés dans le logiciel Maple (voir les figures à partir de la ligne 113) afin de confirmer certaines hypothèses de calcul.

Le premier tracé correspond aux moments de torsion dus aux forces aérodynamiques, à la force centrifuge et à l'inertie de torsion pour différents azimuth de la pale. On vérifie ainsi que l'inertie de torsion est négligeable devant les deux premiers.

Les tracés qui suivent permettent de comparer les déformations calculées à partir des coefficients de déformation et à celles calculées à partir du moment de torsion ce qui permet de vérifier que l'ordre 5 du polynôme de déformation est suffisant pour bien identifier la forme de la déformée.

#### 3.2 Test de validation en mode autogire

La validation à partir de mesures en vol a été réalisé à partir du rapport NACA No 600 ([4]) qui présente des mesures effectuées sur un autogire Kellett KD-1. Ce rapport fournit sous forme de courbes les coefficients de battement a0, a1, b1, a2 et b2 ainsi que les coefficients de déformation de torsion u0, u1, v1, u2 et v2 (calculés au 3/4 du rayon) en fonction du paramètre d'avancement  $\mu$ . Les valeurs mesurées ont été digitalisée avec le logiciel Engauge V4.1 (voir [5])

Les caractéristiques du KD-1 sont les suivantes :

$\bullet$ Poids, $W$	2100 pounds
$\bullet$ Longueur des pales, $R$	20 feet
$ullet$ Moment de battement de la pale, $I_b, I_c$	$175 \text{ slug.feet}^2$
ullet Corde du profil, $c$	1 foot
• Position du centre de gravité du profil	0.280  foot
• Position du foyer du profil	0.242  foot
ullet Nombre de pale, $b$	3
• Pas constant, $\theta_0$	0.096  radian
$ullet$ Coefficient de moment aérodynamique du profil, $C_m$	-0.056
• Rigidité de torsion de la pale, $\mathcal{G}$	1700 pound.feet

A partir des coefficients de conversion suivants :

- 1 slug = 14.5939029 kg
- 1 foot = 0.3048 m
- 1 pound = 0.45359237 kg

et en prenant  $9.81~\rm m/s^2$  pour valeur de l'accélération de la pesanteur, on obtient les caractéristiques du KD-1 en unités SI :

$\bullet$ Poids, $W$	$934.44  \mathrm{daN}$
$\bullet$ Longueur des pales, $R$	$6.096 \mathrm{\ m}$
$ullet$ Moment de battement de la pale, $I_b$	$237.27~\rm kg.m^2$
ullet Corde du profil, $c$	$0.3048~\mathrm{m}$
• Centre de gravité du profil ramené à la corde, $x_{cg}$	0.280
• Foyer du profil ramené à la corde, $x_{ac}$	0.242
ullet Nombre de pale, $b$	3
• Pas constant, $\theta_0$	0.096  radian
$\bullet$ Coefficient de moment aérodynamique du profil, $C_m$	-0.056
• Rigidité de torsion de la pale, $\mathcal{G}$	2305.67  N.m

La définition de la rigidité de torsion  $\mathcal G$  dans la note [4] est différente de celle du paragraphe 1.8 de ce document. Dans la note [4],  $\mathcal G$  est le moment de torsion qui s'applique au pied de pale, distribué le long de la pale suivant la loi  $(B^2-x^2)$  et tel que la déformation au 3/4 du rayon vaille 0.8 radian. Calculons ce moment. Les conditions aux limites conduisent à écrire le moment de torsion sous la forme :

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{G}(1 - \frac{x^2}{R^2}) \tag{3.4}$$

A partie de l'équation de torsion :

$$\frac{d\nu(x)}{dx} = \frac{R\mathcal{M}(x)}{GJ} \tag{3.5}$$

on déduit en intégrant :

$$\nu(x) = \frac{\mathcal{G}R}{GJ}(x - \frac{x^3}{3B^2}) \tag{3.6}$$

En prenant:

$$x = 0.75 \tag{3.7}$$

$$\nu(x) = 0.8 \tag{3.8}$$

$$B = 0.97 (3.9)$$

On obtient:

$$GJ = 0.751GR \tag{3.10}$$

Soit :  $GJ = 10551 \text{ N.m}^2/\text{rad.}$ 

L'équation donnée dans la note [4] est :

$$GJ = \frac{585}{64}GR \tag{3.11}$$

avec  $\mathcal{G} = 1700$  pound.feet, R = 240 inches et GJ en pounds.inches<sup>2</sup>. Le calcul conduit à 10706 N.m<sup>2</sup>/rad, une valeur légèrement supérieure mais cohérente avec la précédente. Nous prendrons cette dernière valeur pour les calculs.

Le profil des pales du KD-1 est un Göttingeh 606 dont il nous faut disposer des coefficients a et  $\delta$  afin de simuler le comportant de l'autogire. On peut calculer la valeur de a à partir du nombre de Lock donné dans le rapport [3]. Celui-ci, évalué au niveau de la mer, vaut : 12.74. On déduit :

$$a = \frac{\gamma I}{c\rho R^4} \tag{3.12}$$

En prenant  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^2$ , on obtient : a = 5.86. Pour déterminer la trainée de profil des pales, on procède comme suit : à partir du diagramme de la vitesse de rotation du rotor en fonction de la vitesse de translation de l'autogire donné dans le rapport [4] on calcule l'incidence et la traînée de profil de telle manière à ce que la portance égale le poids et que le moment total de traînée du rotor à la vitesse de rotation donnée soit nul (condition d'autorotation, voir le programme KD1.java).

On en déduit alors les coefficients de battement et les coefficients de la déformés des pales évalués au trois quart du rayon que l'on peut comparer avec les données mesurées en vols.

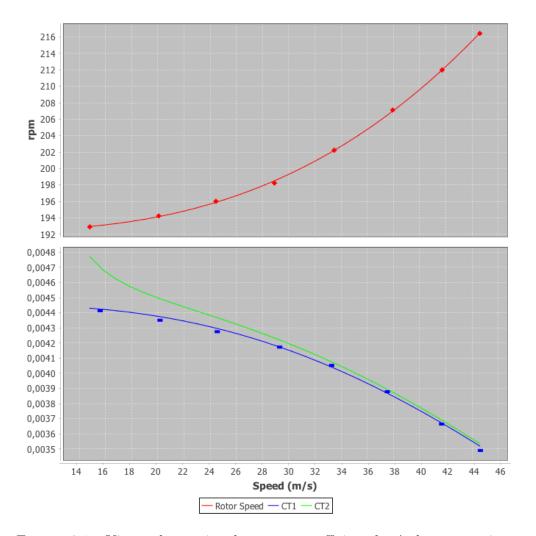


FIGURE 3.1 – Vitesse de rotation du rotor et coefficient de résultante rotorique

La figure 3.1 représente la vitesse de rotation du rotor (en rouge) et les coefficient CT de la résultante rotorique (en bleu et vert). La courbe rouge continue est obtenue par un ajustement polynomial à partir des points extraits de la note [4]. Cette courbe interpolée est utilisé pour calculer l'incidence comme indiqué ci-dessus. La courbe bleu est le coefficient CT calculé comme dans la note [4]. Celle-ci passe parfaitement dans les points extraits de cette note.

La courbe verte est le coefficient CT calculé en prenant en compte l'incidence. On remarque un écart entre la courbe bleue et verte pour les faibles facteurs d'avancements où l'incidence du disque rotor est importante.

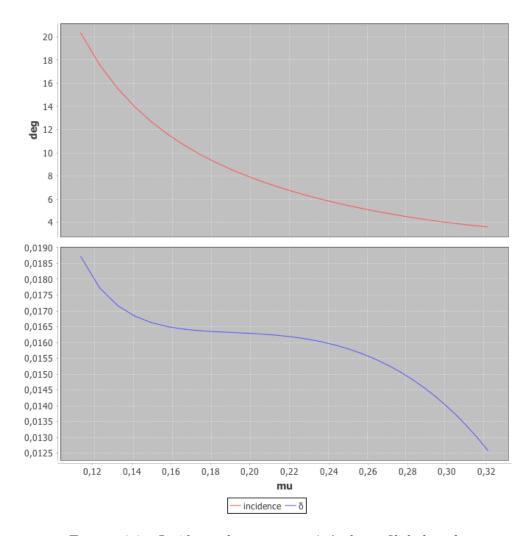


FIGURE 3.2 – Incidence du rotor et traînée de profil de la pale

La figure 3.2 représente l'incidence du disque rotor et le coefficient de traînée de profil de la pale. Le coefficient de traînée moyen du profil Gottingen 606 tel que monté sur le KD1 est d'environ 0.0162.

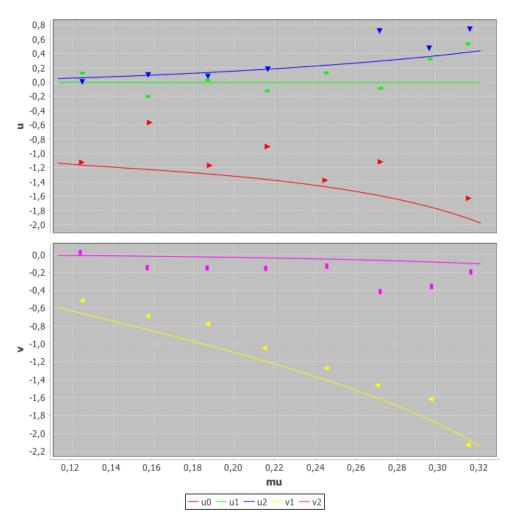


FIGURE 3.3 – Coefficients de déformation

La figure 3.3 représente les coefficients de deformation calculés au trois quart du rayon de la pale. On remarque que les coefficients u0 et v1 qui sont les plus importants sont surestimés. Dans la note [4] dont la déformée est un modèle linéaire, le coefficient v1 est très bien estimé et le coefficient u0 est sous estimé.

Une augmentant de la rigidité de torsion conduit a diminuer v1. On peut alors chercher la valeur qui permet un bon ajustement de ce paramètre. On obtient :  $GJ = 12700 \text{ N.m}^2/\text{rad}$ .

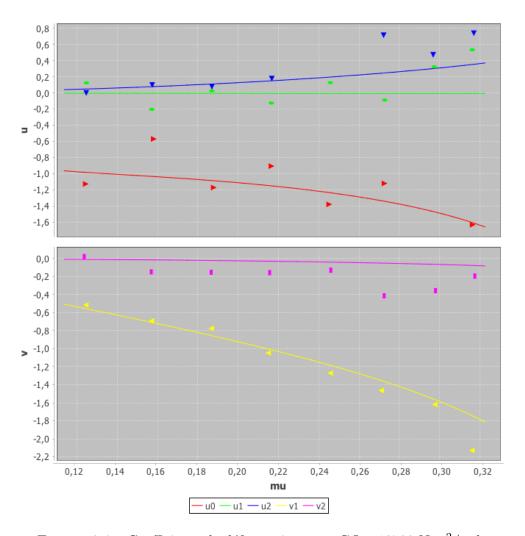


Figure 3.4 – Coefficients de déformation avec  $GJ=12700~\mathrm{N.m^2/rad}$ 

Le résultats est donné figure 3.4. On constate qu'avec cette valeur l'ensemble des coefficients est parfaitement bien estimé.

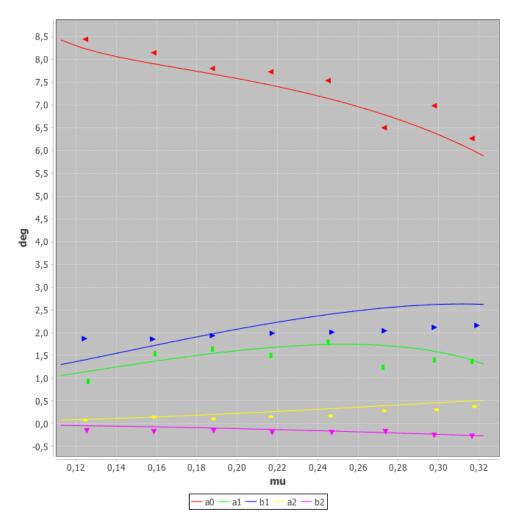


Figure 3.5 – Coefficients de battement

La figure 3.5 représente les coefficients de battement du rotor. L'ensemble des coefficients exceptés b1 sont bien estimés. L'origine de erreur concernant le coefficient b1 est connue. Elle provient du fait que la vitesse induite est supposée constante dans le présent calcul or une variation de celle-ci augmentant de l'avant à l'arrière du rotor accroît le coefficient b1.

Il est intéressant de faire remarquer que la prise en compte de la torsion des pales a peu d'effet sur les coefficients b1, b2, a2, une influence légère sur a0 et une influence importante sur a1 (voir la note [3]).

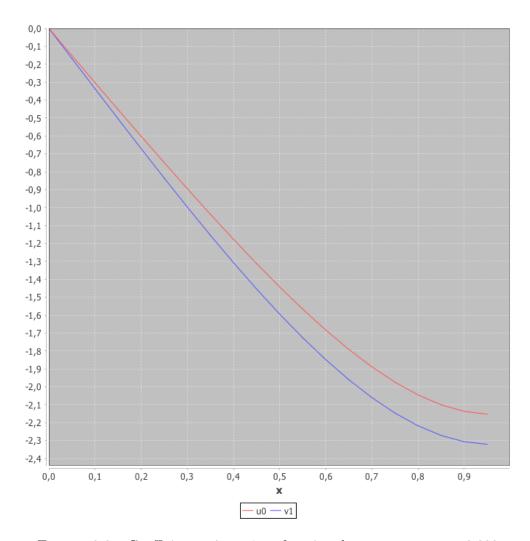


FIGURE 3.6 – Coefficients u0 et v1 en fonction du rayon pour mu=0.322

La figure 3.6 représente les deux coefficients de déformation les plus importants, u0 et v1 en fonction de rayon normalisé x de la pale pour  $\mu = 0.32$ .

Il est intéressant pour terminer de tracer la distribution des incidences sur le disque rotor. La figure 3.7 représente cette distribution obtenue avec le logiciel GyroRotor pour  $\mu$ =0.32. On y remarque l'importance de la zone de décrochage des pales (incidence supérieure à environ 12 degrés), phénomène qui n'est pas modélisée dans cette étude comme cela a été indiqué lors de la revue des hypothèses (voir le chapitre 1.14).

Bien que les résultats soient conformes aux mesures, les simulations sont conduites ici au-delà des limites de la modélisation.

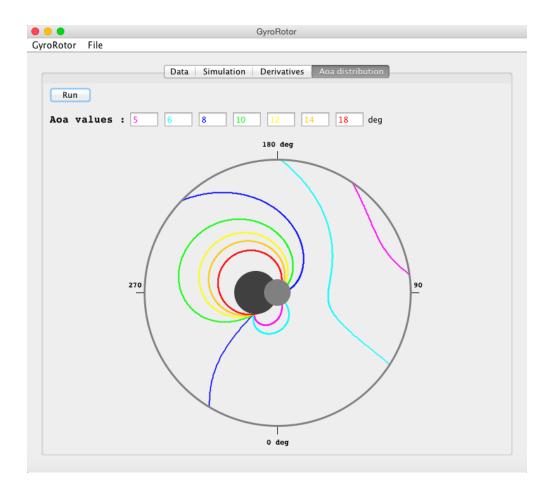


Figure 3.7 – Distribution des incidences des pales pour  $\mu$ =0.32

#### 3.3 Test de validation en mode hélicoptère

La validation s'est porté sur le robinson R22 et a consisté à comparer le diagramme de puissance calculé a celui du manuel de vol (voir le programme HeliPerfos.java).

Les pales sont supposées infiniment rigides. Les caractéristiques du R22 sont les suivantes :

$\bullet$ Poids, $W$	$608  \mathrm{daN}$
$\bullet$ Longueur des pales, $R$	$3.835 \mathrm{m}$
$ullet$ Moment de battement de la pale, $I_b$	$63.73 \text{ kg.m}^2$
ullet Corde du profil, $c$	$0.183 \mathrm{m}$
$\bullet$ Nombre de pale, $b$	2
• Vrillage des pales, $\theta_{TW}$	-7 degrés
ullet Pente du coefficient de portance, $a$	5.7
$\bullet$ Coefficient de traînée du fuse lage, $SC_D$	0.49
• Vitesse de rotation du rotor, $\dot{\psi}$	520  rpm

Le coefficient de traînée du fuselage a été calculé de manière à ajuster la puissance de traînée du fuselage à celle donnée par le diagramme du manuel de

vol.

Le programme a consisté à calculer en fonction de la vitesse : l'incidence du disque rotor, le pas au pied de pale et le coefficient de traînée de profil de la pale pour que la portance égale le poids, que la traînée du fuselage soit compensée par la force motrice du rotor et enfin que la puissance de profil soit celle donnée par le diagramme du manuel de vol. A partir de ces données, on peut calculer la puissance de profil, la puissance induite, la puissance de traînée du fuselage et la puissance totale. Pour prendre en compte la puissance débité par le rotor de queue, 8 % de la puissance que fournit le moteur au rotor a été ajouté à la puissance induite.

La courbe 3.8 donne le coefficient de traînée de profil des pales en fonction de la vitesse.

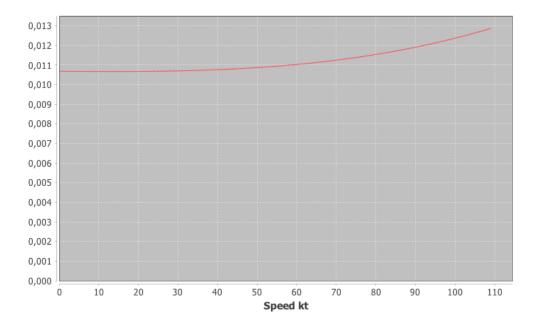


Figure 3.8 – Coefficients de traînée de profil des pales

La courbe de la figure 3.9 donne le diagramme de puissance avec les points issus de celui du manuel de vol. Les résultats sont tés proches.

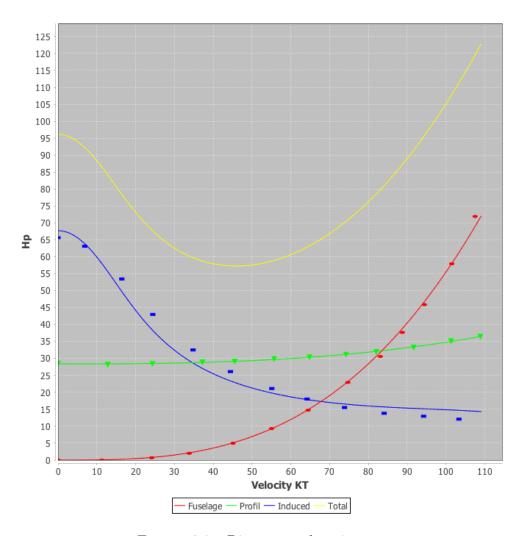


FIGURE 3.9 – Diagramme de puissance

Enfin les deux courbes suivantes fournissent le pas au pieds de pale et l'incidence du disque rotor toujours en fonction de la vitesse.

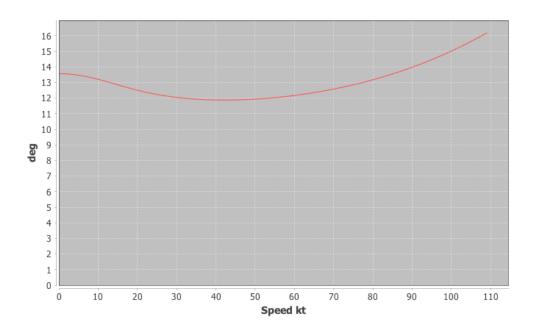


FIGURE 3.10 – Pas au pied de pale

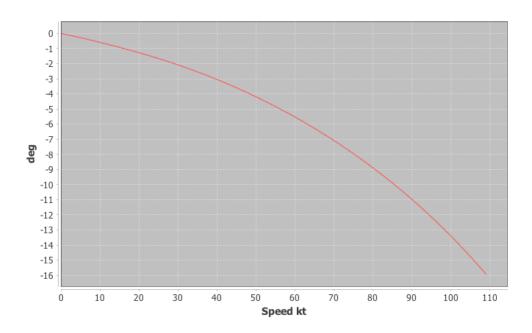


FIGURE 3.11 – Incidence du rotor

#### 3.4 Etude des coefficients de portance et de trainée

Considérons maintenant un rotor aux caractéristiques suivantes : b=2, R=4 m, c=0.2 m,  $\theta_{TW}=0$ ,  $\theta_0=3$  deg,  $I_b=64$  kg.m² doté d'un profil tel que a=5.7 et  $\delta=0.011$ . On ne considère pas de déformation de torsion. Traçons la polaire rotorique de ce rotor en utilisant le modèle de vitesse induite

de Shaydakov (voir le programme PolarAndDragCurves.java). On obtient la courbe de la figure 3.12. Le coefficient de portance maximum vaut 1 pour une traînée équivalente.

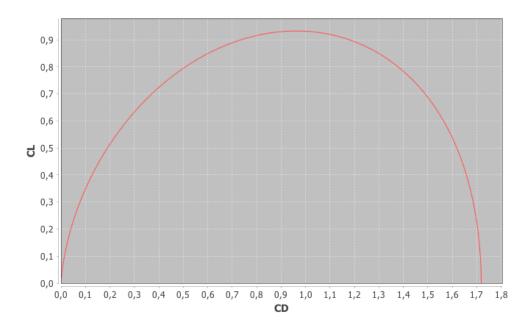


Figure 3.12 – Polaire rotorique

Les deux figures suivantes comparent les valeurs des coefficients CD et CL calculé avec le modéle de Froude (courbe bleue) et Shaydakov (courbe rouge).

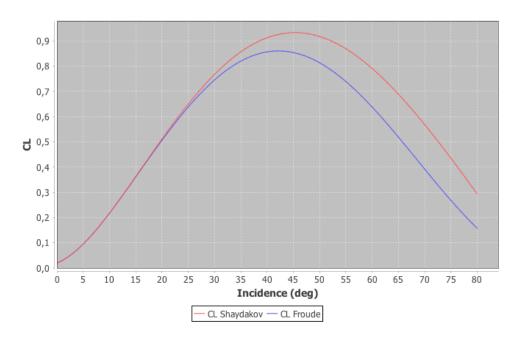


FIGURE 3.13 – Coefficient de portance

On remarque que le modèle de Froude sous estime la valeur des deux coefficients dès 30 degrés avec une erreur très importante du coefficient de traînée pour les forts angles d'incidence. Le modèle de Froude ne peut être utilisé pour calculer la vitesse de descente verticale d'un autogire où l'incidence est de 90 degrés.

La valeur maximum du  ${\cal CL}$  voisine de 1 est obtenue vers 45 degrés d'incidence.

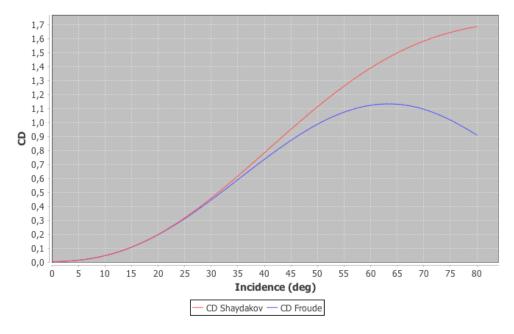


FIGURE 3.14 – Coefficient de trainée

Enfin la courbe 3.15 représente l'évolution du paramètre  $\eta$  en fonction de l'incidence. On remarque que le rotor passe du mode moulinet frein au mode turbulent ( $\eta$ =-2) autour de 35 degrés d'incidence

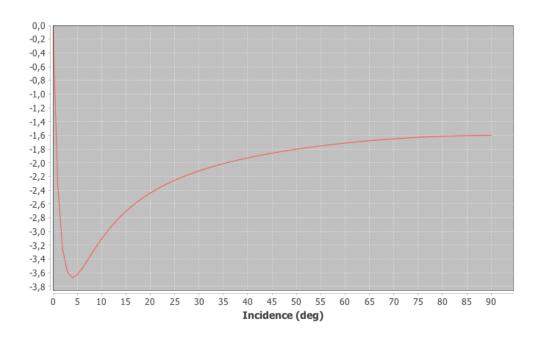


FIGURE 3.15 – Etat de fonctionnement du rotor

# 3.5 Evolution des forces et moments en fonction de l'azimut

La courbe de la figure 3.16 montre l'évolution de la force robotique axiale d'une seule pale en fonction de l'azimut (voir le programme BladeForcesOverAzimut.java).

On remarque que la force est minimale au niveau de la pale reculante ( $\psi=270~{\rm degr\acute{e}s}$ ) et que cette force est supérieure à la moyenne dans toute la région avançante et inférieure à la moyenne dans toute la région reculante. Toutefois à cause des variations à deux fois la fréquence de rotation, la résultante n'est pas maximale en position avançante ( $\psi=90~{\rm degr\acute{e}s}$ ) mais à un azimut proche de 180 degrés. Les variations autour de la moyenne sont d'environ +- 10 %.

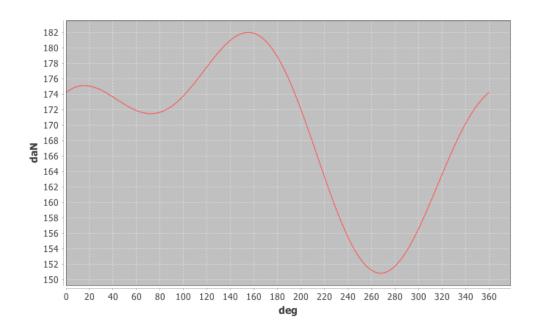


Figure 3.16 – Evolution de la force rotorique en fonction de l'azimut

La courbe 3.17 représente la force dans le plan du rotor des deux pales. L'axe x est la force latérale Y et l'axe y et la force longitudinale H. La figure de cette courbe est parcourue deux fois par tour. Ces forces sont à l'origine des vibrations ressenties dans le manche.

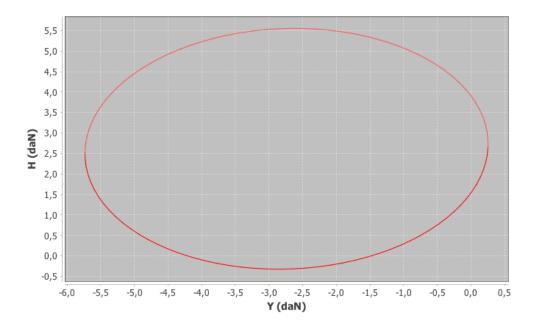


FIGURE 3.17 – Evolution de la force dans le plan du rotor

Enfin la courbe de la figure suivante montre l'évolution du couple rotorique d'une seule pale en fonction de l'azimut (voir le programme BladeTorqueOve-

#### rAzimut.java).

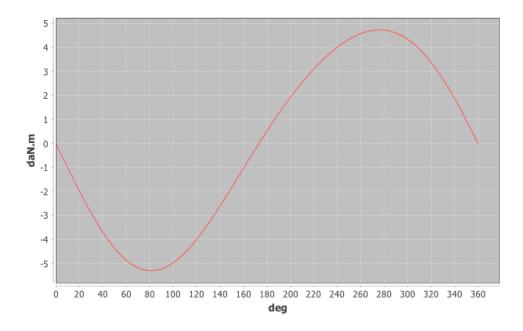


Figure 3.18 – Evolution du couple rotorique en fonction de l'azimut

La variation est quasiment sinusoïdale. Le couple maximum est obtenu à l'azimut 270 degrés (pale reculante) et minimum à l'azimut 90 degrés (pale avançante).

# Bibliographie

- [1] H. Glauert: A general Theory of the Autogiro. Reports and Memoranda 111. November 1926.
- [2] John B. Wheatley: An Aerodynamic Analysis of the Autogiro Rotor with a Comparison between Calculated and Experimental Results. Report NACA No. 487, January 1934.
- [3] John B. Wheatley: An Analytical and Experimental Study of the Effect of Periodic Blade Twist on the Thrust, Torque, and Flapping Motion of an Autogiro Rotor. Report NACA No. 591, January 1937.
- [4] John B. Wheatley: An Analysis of the Factors that Determine the Periodic Twist of an Autogyro Rotor Blade, with a Comparison of Predicted and Measured Resuls. Report NACA No. 600, April 1937.
- [5] V. I. Shaydakov: Aerodynamic calculation for helicopter lifting rotors in steep descent. Army Foriegn Science and Technology Center. October 1971.
- [6] Bramwell's Helicopter Dynamic
- [7] Engauge Digitizer: http://digitizer.sourceforge.net

# Annexe A<br/>Résultats Maple

#### **Combined Fourier series**

> restart ;

Fourier series over pi .. 2\*pi

> dy := dA0+dB1\*sin(psi)-dA0\*cos(2\*psi)+dB2\*sin(2\*psi);  

$$dy := dA0 + dB1 \sin(\psi) - dA0 \cos(2\psi) + dB2 \sin(2\psi)$$
(1)

Fourier coefficient of combined series

> C0 := expand(1/2/Pi\*int(dy,psi=Pi..2\*Pi)); 
$$C0 := \frac{1}{2} dA0 - \frac{dB1}{\pi}$$
 (2)

> C1 := expand(1/Pi\*int(dy\*cos(psi),psi=Pi..2\*Pi)); 
$$CI := -\frac{4}{3} \frac{dB2}{\pi}$$
 (3)

> D1 := expand(1/Pi\*int(dy\*sin(psi),psi=Pi..2\*Pi)); 
$$D1 := \frac{1}{2} dB1 - \frac{8}{3} \frac{dA0}{\pi}$$
 (4)

> C2 := expand(1/Pi\*int(dy\*cos(2\*psi),psi=Pi..2\*Pi)); 
$$C2 := \frac{2}{3} \frac{dBI}{\pi} - \frac{1}{2} dA0$$
 (5)

> D2 := expand(1/Pi\*int(dy\*sin(2\*psi),psi=Pi..2\*Pi)); 
$$D2 := \frac{1}{2} dB2$$
 (6)

**(7)** 

#### Forces and moments computation

- > restart ;
- > with(CodeGeneration); with(linalg);
- [C, Fortran, IntermediateCode, Java, LanguageDefinition, Matlab, Names, Save, Translate, VisualBasic]
- [BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

#### \_Elementary forces and moments

Flapping moment [Eq]

```
> dM := 1/2*rho*a*c*R^2*x*(theta[R]*UT^2+UP*UT) ;
                             dM := \frac{1}{2} \rho a c R^2 x \left( \theta_R U T^2 + U P U T \right)
                                                                                                        (8)
Thrust [eq]
> d2L := 1/2*rho*a*c*R*(theta[R]*UT^2+UP*UT) ;
                              d2L := \frac{1}{2} \rho a c R \left( \theta_R U T^2 + U P U T \right)
                                                                                                        (9)
Rear profile force [Eq]
> d2Hp := 1/2*rho*delta*c*R*UT^2*sin(psi) ;
                                 d2Hp := \frac{1}{2} \rho \delta c R UT^2 \sin(\psi)
                                                                                                      (10)
Rear induced force [Eq]
> d2Hi := -1/2*rho*a*c*R*((theta[R]*UT^2+UP*UT)*beta(psi)*cos(psi)
    +(theta[R]*UP*UT+UP^2)*sin(psi));
   d2Hi := -\frac{1}{2} \rho a c R \left( \left( \theta_R U T^2 + U P U T \right) \beta(\psi) \cos(\psi) + \left( \theta_R U P U T + U P^2 \right) \sin(\psi) \right)
                                                                                                      (11)
Lateral profile force [Eq]
> d2Yp := -1/2*rho*delta*c*R*UT^2*cos(psi);
                                d2Yp := -\frac{1}{2} \rho \delta c R UT^2 \cos(\psi)
                                                                                                      (12)
Lateral induced force [Eq.]
> d2Yi := 1/2*rho*a*c*R*(-(theta[R]*UT^2+UP*UT)*beta(psi)*sin(psi)
    +(theta[R]*UP*UT+UP^2)*cos(psi));
    d2Yi := \frac{1}{2} \rho a c R \left( -\left(\theta_R U T^2 + U P U T\right) \beta(\psi) \sin(\psi) + \left(\theta_R U P U T + U P^2\right) \cos(\psi) \right)
                                                                                                      (13)
Rotor profile torque [Eq]
> d2Qp := -R*x*1/2*rho*delta*c*R*UT^2;
                                   d2Qp := -\frac{1}{2} R^2 x \rho \delta c UT^2
                                                                                                      (14)
Rotor induced torque [Eq]
> d2Qi := 1/2*R^2*x*rho*a*c*(theta[R]*UP*UT+UP^2);
                            d2Qi := \frac{1}{2} R^2 x \rho a c \left( \theta_R UP UT + UP^2 \right)
                                                                                                      (15)
Aerodynamic torsional moment [Eq]
> d2N := 1/2*rho*R*c^2*(Cm*UT^2+a*1/c*(theta[R]*UT^2+UP*UT));
                    d2N := \frac{1}{2} \rho R c^{2} \left( Cm UT^{2} + \frac{a l \left( \theta_{R} UT^{2} + UP UT \right)}{c} \right)
                                                                                                      (16)
Propeller moment [Eq]
> d2P := -Omega^2*Icb*theta[R];
                                        d2P := -\Omega^2 Icb \, \theta_R
                                                                                                      (17)
Velocity component UP [eq]
> UP := R*Omega*(-mu*beta(psi)*cos(psi)+lambda-x*diff(beta(psi),
```

```
psi)+x*q*cos(psi)+x*p*sin(psi));
                   UP := R \Omega \left( -\mu \beta(\psi) \cos(\psi) + \lambda - x \left( \frac{d}{d\psi} \beta(\psi) \right) + x q \cos(\psi) + x p \sin(\psi) \right)
                                                                                                                                                                                                                                                                            (18)
 Velocity component UT [eq]
  > UT := R*Omega*(mu*sin(psi)+x) ;
                                                                                              UT := R \Omega (\mu \sin(\psi) + x)
                                                                                                                                                                                                                                                                            (19)
 Pitch deformation [Eq ]
  > nu := u01*x+u02*x^2+u03*x^3+u04*x^4+u05*x^5+(u11*x+u12*x^2+u13*
           x^3+u14*x^4+u15*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^2+v13*x^3+v14*x^4+v12*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^2+v13*x^3+v14*x^4+v12*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^2+v13*x^3+v14*x^4+v12*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v13*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5)*cos(psi)+(v11*x+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5+v12*x^5
           v15*x^5)*sin(psi)+(u21*x+u22*x^2+u23*x^3+u24*x^4+u25*x^5)*cos(2*)*
           psi)+(v21*x+v22*x^2+v23*x^3+v24*x^4+v25*x^5)*sin(2*psi);
 v := u01 x + u02 x^2 + u03 x^3 + u04 x^4 + u05 x^5 + (u11 x + u12 x^2 + u13 x^3 + u14 x^4)
                                                                                                                                                                                                                                                                            (20)
              + u15 x^{5} \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^{2} + v13 x^{3} + v14 x^{4} + v15 x^{5}) \sin(\psi) + (u21 x^{2} + v13 x^{3} + v14 x^{4} + v15 x^{5}) \sin(\psi)
              + u22 x^{2} + u23 x^{3} + u24 x^{4} + u25 x^{5} \cos(2 \psi) + (v21 x + v22 x^{2} + v23 x^{3} + v24 x^{4})
              + v25 x^5) sin(2 \psi)
 Total blade pitch [Eq.]
  > theta[R] := theta[0]+x*theta[TW]+nu;
 \theta_R := \theta_0 + x \, \theta_{TW} + u01 \, x + u02 \, x^2 + u03 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u12 \, x^2 + u13 \, x^3 + u04 \, x^4 + u05 \, x^5 + (u11 \, x + u1
                                                                                                                                                                                                                                                                            (21)
              +u14x^4+u15x^5) \cos(\psi)+(v11x+v12x^2+v13x^3+v14x^4+v15x^5)\sin(\psi)
              + (u21x + u22x^2 + u23x^3 + u24x^4 + u25x^5) \cos(2\psi) + (v21x + v22x^2 + v23x^3)
              + v24 x^4 + v25 x^5 \sin(2 \Psi)
Integration along the blade from x to B or x to 1
> dMR := factor(int(dM,x=0..B)):
> dMRInv := factor(int(dM,x=0..-mu*sin(psi))):
> dL := factor(int(d2L,x=0..B)):
> dLInv := factor(int(d2L,x=0..-mu*sin(psi))):
> dHp := factor(int(d2Hp,x=0..1)):
> dHi := factor(int(d2Hi,x=0..B)):
> dYp := factor(int(d2Yp,x=0..1)):
> dYi := factor(int(d2Yi,x=0..B)):
> dQp := factor(int(d2Qp,x=0..1)):
> dQpInv := factor(int(d2Qp,x=0..-mu*sin(psi))):
> dQi := factor(int(d2Qi,x=0..B)):
> dQiInv := factor(int(d2Qi,x=0..-mu*sin(psi))):
> dN := factor(int(d2N,x=x..B)):
> dP := factor(int(d2P,x=x..1)):
 Flapping equation [eq]
  > beta(psi) := a0-a1*cos(psi)-b1*sin(psi)-a2*cos(2*psi)-b2*sin(2*
```

```
psi);
             \beta(\psi) := a0 - a1\cos(\psi) - b1\sin(\psi) - a2\cos(2\psi) - b2\sin(2\psi)
                                                                                                         (22)
Force normalisation coefficient [Eq 14]
> Kf := rho*b*c*R^3*Omega^2 ;
                                          Kf := \Omega h c R^3 \Omega^2
                                                                                                         (23)
Torque normalisation coefficient [Eq 16]
> Kq := rho*b*c*R^4*Omega^2 ;
                                         Kq := \rho b c R^4 \Omega^2
                                                                                                         (24)
Evaluation of blade velocity components
> UP := factor(expand(UP));
UP := R \Omega \left( -\mu \cos(\psi) \ a\theta + \mu \cos(\psi)^2 a + \mu \cos(\psi) \ b \sin(\psi) + 2\mu \cos(\psi)^3 a + \mu \cos(\psi) \right)
                                                                                                         (25)
     -\mu\cos(\psi) a2 + 2\mu\cos(\psi)^2 b2\sin(\psi) + \lambda - x a1\sin(\psi) + x b1\cos(\psi)
     -4 x a 2 \sin(\psi) \cos(\psi) + 4 x b 2 \cos(\psi)^{2} - 2 x b 2 + x q \cos(\psi) + x p \sin(\psi)
> UT := factor(expand(UT));
                                    UT := R \Omega (\mu \sin(\psi) + x)
                                                                                                         (26)
Code generation: UT,UP
> Java([ut=subs(sin(psi)=sinPsi,cos(psi)=cosPsi,UT),up=subs(sin
    (psi)=sinPsi,cos(psi)=cosPsi,UP)],coercetypes=false,optimize=
    true,output="GyroRotorFiles/UTUP.java");
Angle of attack distribution over rotor disk
Case of no blade twist
> eq := aoa = theta[0]+simplify(UP/UT) ;
eq := aoa = \theta_0 + \frac{1}{\mu \sin(\psi) + x} (-\mu \cos(\psi) \ a\theta + \mu \cos(\psi)^2 \ a\theta + \mu \cos(\psi) \ b\theta \sin(\psi)
                                                                                                         (27)
     +2 \mu \cos(\psi)^{3} a^{2} - \mu \cos(\psi) a^{2} + 2 \mu \cos(\psi)^{2} b^{2} \sin(\psi) + \lambda - x a^{2} \sin(\psi)
     +x b1 \cos(\psi) - 4x a2 \sin(\psi) \cos(\psi) + 4x b2 \cos(\psi)^{2} - 2x b2 + x q \cos(\psi)
     +xp\sin(\psi)
> X := solve(eq,x) ;
X := -\left(-aoa\,\mu\sin(\psi) + \sin(\psi)\,\mu\theta_0 - \mu\cos(\psi)\,a\theta + \mu\cos(\psi)^2\,a\theta + \mu\cos(\psi)\,b\theta\sin(\psi)\right)
                                                                                                         (28)
     +2 \mu \cos(\psi)^{3} a^{2} - \mu \cos(\psi) a^{2} + 2 \mu \cos(\psi)^{2} b^{2} \sin(\psi) + \lambda / (-aoa + \theta_{0})
     -a1\sin(\psi) + b1\cos(\psi) - 4a2\sin(\psi)\cos(\psi) + 4b2\cos(\psi)^{2} - 2b2 + q\cos(\psi)
     +p\sin(\psi)
Code generation: aoa in case of no blade twist
> Java([x=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,cos(psi)=cosPsi,
    sin(psi)=sinPsi,X)],coercetypes=false,output=
    "GyroRotorFiles/AOA1.java");
```

```
Case of linear twist (theta[1]=theta[TW]+u00+u10+v10+u20+v20; only first order of pitch
 deformation is taking into account)
    eq := simplify((aoa*UT-(theta[0]+x*theta[1])*UT - UP)/R/Omega);
eq := aoa \,\mu \sin(\psi) + aoa \,x - \sin(\psi) \,\mu \,\theta_0 - \theta_0 \,x - x \,\theta_1 \,\mu \sin(\psi) - x^2 \,\theta_1 + \mu \cos(\psi) \,a\theta
                                                                                                                              (29)
       -\mu\cos(\psi)^{2}aI - \mu\cos(\psi)bI\sin(\psi) - 2\mu\cos(\psi)^{3}a2 + \mu\cos(\psi)a2
       -2\mu\cos(\psi)^2b2\sin(\psi) - \lambda + xaI\sin(\psi) - xbI\cos(\psi) + 4xa2\sin(\psi)\cos(\psi)
      -4xb2\cos(\psi)^{2} + 2xb2 - xq\cos(\psi) - xp\sin(\psi)
> des := discrim(eq,x) ;
des := -2 \theta_1 \mu \cos(\psi) b l \sin(\psi) - 8 \theta_1 a l \sin(\psi)^2 \cos(\psi) \mu + 2 \theta_1 \mu \sin(\psi) q \cos(\psi)
                                                                                                                              (30)
       -4 \theta_1 \lambda + q^2 \cos(\psi)^2 + p^2 \sin(\psi)^2 - 16 b2^2 \cos(\psi)^2 + aI^2 \sin(\psi)^2 + bI^2 \cos(\psi)^2
      +16 b2^{2} \cos(\psi)^{4} - 2 aoa \theta_{0} + 4 aoa b2 - 4 \theta_{0} b2 + \theta_{1}^{2} \mu^{2} \sin(\psi)^{2}
      +16 a2^{2} \sin(\psi)^{2} \cos(\psi)^{2} + 2 aoa a1 \sin(\psi) - 2 aoa b1 \cos(\psi) - 8 aoa b2 \cos(\psi)^{2}
      -2 aoa q \cos(\psi) - 2 aoa p \sin(\psi) - 2 \theta_0 al \sin(\psi) + 2 \theta_0 bl \cos(\psi)
      +8 \theta_0 b2 \cos(\psi)^2 + 2 \theta_0 q \cos(\psi) + 2 \theta_0 p \sin(\psi) + 4 b2 a1 \sin(\psi) - 4 b2 b1 \cos(\psi)
      -4 b2 q \cos(\psi) - 4 b2 p \sin(\psi) - 2 a1 \sin(\psi)^{2} p + 8 b1 \cos(\psi)^{3} b2 + 2 b1 \cos(\psi)^{2} q
      +8 b2 \cos(\psi)^{3} q + 2 q \cos(\psi) p \sin(\psi) + 8 a2 \sin(\psi) \cos(\psi) aoa
       -8 a2 \sin(\psi) \cos(\psi) \theta_0 + 8 a2 \sin(\psi)^2 \cos(\psi) a1 - 8 a2 \sin(\psi) \cos(\psi)^2 b1
      -32 a2 \sin(\psi) \cos(\psi)^3 b2 + 16 a2 \sin(\psi) \cos(\psi) b2 - 8 a2 \sin(\psi) \cos(\psi)^2 q
       -8 a2 \sin(\psi)^{2} \cos(\psi) p - 2 a1 \sin(\psi) b1 \cos(\psi) - 8 a1 \sin(\psi) b2 \cos(\psi)^{2}
       -2 a1 \sin(\psi) q \cos(\psi) + 2 b1 \cos(\psi) p \sin(\psi) + 8 b2 \cos(\psi)^{2} p \sin(\psi)
      +2 \theta_1 aoa \mu \sin(\psi) - 2 \theta_1 \theta_0 \mu \sin(\psi) + 4 \theta_1 \mu \cos(\psi) a\theta - 4 \theta_1 \mu \cos(\psi)^2 aI
       -8 \theta_1 \mu \cos(\psi)^3 a^2 + 4 \theta_1 \mu \cos(\psi) a^2 - 4 \theta_1 b^2 \mu \sin(\psi) - 2 \theta_1 \mu \sin(\psi)^2 a^2
      +2 \theta_1 \mu \sin(\psi)^2 p + aoa^2 + \theta_0^2 + 4 b2^2
> r1 := coeff(eq,x^2);
                                                       r1 := -\theta_1
                                                                                                                              (31)
> r2 := coeff(eq,x);
r2 := aoa - \theta_0 - \theta_1 \mu \sin(\psi) + a1 \sin(\psi) - b1 \cos(\psi) + 4 a2 \sin(\psi) \cos(\psi)
                                                                                                                              (32)
      -4 b2 \cos(\psi)^2 + 2 b2 - q \cos(\psi) - p \sin(\psi)
> X1 := (-r2 + sqrt(delta))/(2*r1);
XI := -\frac{1}{2} \frac{1}{\theta_{1}} \left( -aoa + \theta_{0} + \theta_{1} \mu \sin(\psi) - aI \sin(\psi) + bI \cos(\psi) - 4 a2 \sin(\psi) \cos(\psi) \right)
                                                                                                                              (33)
```

```
+4 b2 \cos(\psi)^{2} - 2 b2 + q \cos(\psi) + p \sin(\psi) + \sqrt{\delta}
=

> X2 := (-r2 - sqrt(delta))/(2*r1);
X2 := -\frac{1}{2} \frac{1}{\theta_{0}} \left( -aoa + \theta_{0} + \theta_{1} \mu \sin(\psi) - aI \sin(\psi) + bI \cos(\psi) - 4 a2 \sin(\psi) \cos(\psi) \right)
                                                                                                                     (34)
      +4 b2 \cos(\psi)^{2} - 2 b2 + q \cos(\psi) + p \sin(\psi) - \sqrt{\delta}
Code generation: aoa with linear twist
> Java([delta=subs(theta[0]=theta0,theta[1]=theta1,cos(psi)=
     cosPsi,sin(psi)=sinPsi,des),x1=subs(theta[0]=theta0,theta[1]=
     theta1,cos(psi)=cosPsi,sin(psi)=sinPsi,X1),x2=subs(theta[0]=
     theta0,theta[1]=theta1,cos(psi)=cosPsi,sin(psi)=sinPsi,X2)],
     coercetypes=false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/AOA2.
     java");
Thrust
Mean value over one rev, b blades
> T := simplify(b/(2*Pi)*(int(dL,psi=0..2*Pi)-2*int(dLInv,psi=Pi.
T := \frac{1}{67737600} \frac{1}{\pi} \left( b \rho a c R^3 \Omega^2 \left( 163840 \mu^8 v 15 + 516096 \mu^6 v 13 + 229376 \mu^7 u 24 \right) \right)
                                                                                                                     (35)
      -\ 1204224\ \mu^{5}\ u02-18063360\ \mu^{3}\ b2-294912\ \mu^{7}\ u04+3010560\ \mu^{4}\ v11
      -\,15052800\,{\mu}^{3}\,{\theta}_{0}+860160\,{\mu}^{5}\,u22+16934400\,B\,{\theta}_{0}\,{\mu}^{2}\,\pi+8467200\,B\,{\mu}^{2}\,b2\,\pi
      +8467200 B^{2} \mu^{2} u01 \pi + 2822400 B^{6} \mu^{2} u05 \pi + 5644800 B^{6} \mu v14 \pi + 8467200 B^{2} \mu p \pi
      +4838400 B^7 \mu v 15 \pi + 4233600 B^4 \mu^2 u 03 \pi - 2116800 B^4 \mu^2 u 23 \pi
      -1693440 B^5 \mu^2 u^2 4 \pi - 1411200 B^6 \mu^2 u^2 25 \pi + 8467200 B^2 \mu^2 \theta_{TW} \pi
      -2822400 B^3 \mu^2 u^2 u^2 \pi + 11289600 B^3 \mu v II \pi + 5644800 B^3 \mu^2 u^2 u^2 \pi
      +6773760 B^{5} \mu v 13 \pi -4233600 B^{2} \mu^{2} u 21 \pi +8467200 B^{4} \mu v 12 \pi
      +3386880 B^{5} \mu^{2} u04 \pi + 8467200 \mu^{2} \lambda \pi + 88200 \mu^{7} v14 \pi + 352800 \mu^{5} v12 \pi
      +705600 \mu^{4} u21 \pi + 132300 \mu^{6} u23 \pi + 44100 \mu^{8} u25 \pi + 4233600 \mu^{3} a1 \pi
      -2116800 \,\mu^{3} \,p\,\pi - 1058400 \,\mu^{4} \,\theta_{\scriptscriptstyle TW} \pi - 176400 \,\mu^{6} \,u03\,\pi - 1058400 \,\mu^{4} \,u01\,\pi
      -55125 \mu^8 u05 \pi + 11289600 B^3 \theta_0 \pi + 6773760 B^5 u02 \pi + 8467200 B^4 u01 \pi
      +\,4838400\,{\it B}^{7}\,u04\,\pi + 8467200\,{\it B}^{4}\,\theta_{{\it TW}}\pi + 5644800\,{\it B}^{6}\,u03\,\pi + 4233600\,{\it B}^{8}\,u05\,\pi
      + 16934400 B^2 \lambda \pi)
```

Define truncate function of power of mu

```
> truncate := proc(input,order)
                  local res;
                 res := subs(a1=a1*mu,b1=b1*mu,a2=a2*mu^2,b2=b2*mu^2,simplify
          (input)):
                 res := subs(u10=u10*mu,u11=u11*mu,u12=u12*mu,u13=u13*mu,u14=
         u14*mu,res):
                 res := subs(v10=v10*mu,v11=v11*mu,v12=v12*mu,v13=v13*mu,v14=
         v14*mu,res):
                 res := subs(u20=u20*mu^2,u21=u21*mu^2,u22=u22*mu^2,u23=u23*
         mu^2,u^24=u^24*mu^2,res):
                 res := subs(v20=v20*mu^2,v21=v21*mu^2,v22=v22*mu^2,v23=v23*
         mu^2, v24=v24*mu^2, res):
                 res := expand(convert(taylor(res,mu,order),polynom)):
                 res := subs(a1=a1/mu,b1=b1/mu,a2=a2/mu^2,b2=b2/mu^2,res):
                 res := subs(u10=u10/mu,u11=u11/mu,u12=u12/mu,u13=u13/mu,u14=
         u14/mu,res):
                 res := subs(v10=v10/mu,v11=v11/mu,v12=v12/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v13=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14=v13/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14/mu,v14
         v14/mu,res):
                 res := subs(u20=u20/mu^2,u21=u21/mu^2,u22=u22/mu^2,u23=u21)
         u23/mu<sup>2</sup>,u24=u24/mu<sup>2</sup>,res):
                 res := subs(v20=v20/mu^2,v21=v21/mu^2,v22=v22/mu^2,v23=v21)
         v23/mu<sup>2</sup>,v24=v24/mu<sup>2</sup>,res):
                 res ;
         end proc;
                                                                                                                                                                                                                                                                  (36)
truncate := \mathbf{proc}(input, order)
          local res;
          res := subs(a1 = mu * a1, b1 = mu * b1, a2 = mu^2 * a2, b2 = mu^2 * b2, simplify(input));
          res := subs(u10 = u10 * mu, u11 = u11 * mu, u12 = mu * u12, u13 = u13 * mu, u14 = mu
           * u14, res);
          res := subs(v10 = v10 * mu, v11 = mu * v11, v12 = v12 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v13 = mu * v13, v14 = v14 * mu, v14 * mu
          res);
          res := subs(u20 = u20 * mu^2, u21 = mu^2 * u21, u22 = mu^2 * u22, u23 = u23 * mu^2, u24
           = \text{mu}^2 * u24, res;
          res := subs(v20 = v20 * mu^2, v21 = mu^2 * v21, v22 = v22 * mu^2, v23 = mu^2 * v23, v24
           = v24 * mu^2, res;
          res := expand(convert(taylor(res, mu, order), polynom));
          res := subs(a1 = a1 / mu, b1 = b1 / mu, a2 = a2 / mu^2, b2 = b2 / mu^2, res);
          res := subs(u10 = u10 / mu, u11 = u11 / mu, u12 = u12 / mu, u13 = u13 / mu, u14 = u14 / mu,
          res := subs(v10 = v10/mu, v11 = v11/mu, v12 = v12/mu, v13 = v13/mu, v14 = v14/mu,
          res);
          res := subs(u20 = u20 / \text{mu}^2, u21 = u21 / \text{mu}^2, u22 = u22 / \text{mu}^2, u23 = u23 / \text{mu}^2, u24
```

```
= u24 / \text{mu}^2, res:
     res := subs(v20 = v20 / mu^2, v21 = v21 / mu^2, v22 = v22 / mu^2, v23 = v23 / mu^2, v24
     res
end proc
Thrust coefficient
> CT := truncate(T/Kf,5); T := Kf*CT:
CT := \frac{1}{8} a \mu B^2 p + \frac{1}{14} a \mu B^7 v 15 + \frac{1}{12} a \mu^2 B^3 u 02 + \frac{1}{8} a \mu^2 B^2 u 01 + \frac{1}{24} a \mu^2 B^6 u 05
                                                                                                                                   (37)
      +\frac{1}{8} a \mu^{2} B^{2} \theta_{TW} + \frac{1}{4} a \mu^{2} B \theta_{0} + \frac{1}{16} a \mu^{2} B^{4} u 0 3 - \frac{1}{48} a \mu^{2} B^{6} u 2 5 + \frac{1}{20} a \mu^{2} B^{5} u 0 4
      +\frac{1}{8} a \mu^{2} B b 2 + \frac{1}{6} a \mu B^{3} v 11 + \frac{1}{8} a \mu B^{4} v 12 + \frac{1}{10} a \mu B^{5} v 13 + \frac{1}{12} a \mu B^{6} v 14
      -\frac{1}{16} a \mu^{2} B^{2} u 21 - \frac{1}{24} a \mu^{2} B^{3} u 22 - \frac{1}{32} a \mu^{2} B^{4} u 23 - \frac{1}{40} a \mu^{2} B^{5} u 24 + \frac{1}{6} a B^{3} \theta_{0}
      +\frac{1}{10} a B^5 u 02 + \frac{1}{8} a B^4 u 01 + \frac{1}{14} a B^7 u 04 + \frac{1}{8} a B^4 \theta_{TW} + \frac{1}{12} a B^6 u 03 + \frac{1}{16} a B^8 u 05
      +\frac{1}{4}aB^{2}\lambda+\frac{1}{8}a\mu^{2}\lambda-\frac{1}{32}a\mu^{3}p-\frac{2}{9}\frac{a\mu^{3}\theta_{0}}{\pi}-\frac{1}{64}a\mu^{4}\theta_{TW}-\frac{1}{64}a\mu^{4}u0I
     +\frac{1}{16} a \mu^3 a 1
Functions to get terms ordered
> ex1 := proc(r)
       global input;
       local res;
       res:=expand(coeff(input,r))*r;
       input:=simplify(input-res);
       res;
     end proc;
ex1 := \mathbf{proc}(r)
                                                                                                                                   (38)
     local res;
     global input;
     res := expand(coeff(input, r)) * r; input := simplify(input - res); res
end proc
> ex2 := proc(r,rank)
       local i,res;
       global input;
       for i from 1 to rank do
           res := res + expand(coeff(input,r||i))*r||i;
       input:=simplify(input-res);
```

```
res;
       end proc;
                                                                                                                                                                   (39)
ex2 := \mathbf{proc}(r, rank)
       global input;
       res := 0;
       for i to rank do res := res + expand(coeff(input, r||i|) * r||i| end do;
       input := simplify(input - res);
       res
end proc
CT Terms
> input := 2*CT/a:
\left(\frac{1}{4}B^{2}\mu^{2} + \frac{1}{4}B^{4} - \frac{1}{32}\mu^{4}\right)u01 + \left(\frac{1}{6}B^{3}\mu^{2} + \frac{1}{5}B^{5}\right)u02 + \left(\frac{1}{8}B^{4}\mu^{2} + \frac{1}{6}B^{6}\right)u03
       + \left(\frac{1}{10}B^5\mu^2 + \frac{1}{7}B^7\right)u04 + \left(\frac{1}{12}\mu^2B^6 + \frac{1}{8}B^8\right)u05
                        \frac{1}{3} B^{3} \mu v I I + \frac{1}{4} B^{4} \mu v I 2 + \frac{1}{5} B^{5} \mu v I 3 + \frac{1}{6} B^{6} \mu v I 4 + \frac{1}{7} B^{7} \mu v I 5
              -\frac{1}{8} B^{2} \mu^{2} u 21 - \frac{1}{12} B^{3} \mu^{2} u 22 - \frac{1}{16} B^{4} \mu^{2} u 23 - \frac{1}{20} B^{5} \mu^{2} u 24 - \frac{1}{24} \mu^{2} B^{6} u 25
                                                                                                                                                                   (40)
 > ex1(p);ex1(q);ex1(lambda);ex1(theta[0]);ex1(theta[TW]);ex1(a0);
       ex1(a1);ex1(b1);ex1(a2);ex1(b2);
                                                             \left(\frac{1}{4}B^2\mu - \frac{1}{16}\mu^3\right)p
                                                                \left(\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{4}\mu^2\right)\lambda
                                                     \left(-\frac{4}{9} \frac{\mu^{3}}{\pi} + \frac{1}{2} B \mu^{2} + \frac{1}{3} B^{3}\right) \theta_{0}
                                                     \left(\frac{1}{4} B^2 \mu^2 + \frac{1}{4} B^4 - \frac{1}{32} \mu^4\right) \theta_{TW}
                                                                        \frac{1}{8} \mu^3 a1
                                                                       \frac{1}{4}B\mu^2b2
                                                                                                                                                                   (41)
```

```
0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                (42)
    Periodic component of thrust
                                    TP := b*combine(dL/Kf,trig):
> TP1S := coeff(TP,sin(psi))
                           TP1C := coeff(TP,cos(psi)):
                                TP2S := coeff(TP,sin(2*psi)):
                         TP2C := coeff(TP,cos(2*psi)):
 Rear force
     Profile mean value over one rev, b blades
         > Hp := b/(2*Pi)*int(dHp,psi=0..2*Pi) ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                Hp := \frac{1}{4} b \rho \delta c R^3 \Omega^2 \mu
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                (43)
     Profile coefficient
         > CHp := simplify(Hp/Kf);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     CHp := \frac{1}{4} \delta \mu
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                (44)
     Induced mean value over one rev, b blades
       > Hi := simplify(b/(2*Pi)*int(dHi,psi=0..2*Pi)) :
 > CHi := truncate(Hi/Kf,5): Hi := Kf*CHi:
     CHi Terms
       > ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);  \left(\frac{1}{4}B^{3}\mu b2 - \frac{1}{8}B^{4}p - \frac{1}{4}B^{2}\mu\lambda + \frac{1}{4}B^{4}aI\right)u0I + \left(\frac{3}{16}B^{4}\mu b2 - \frac{1}{10}B^{5}p - \frac{1}{6}B^{3}\mu\lambda\right) 
                                       +\frac{1}{5}B^{5}aI u02 + \left(\frac{3}{20}B^{5}\mu b2 - \frac{1}{12}B^{6}p - \frac{1}{8}B^{4}\mu\lambda + \frac{1}{6}B^{6}aI\right)u03 + \left(\frac{1}{8}B^{6}\mu b2\right)u03 + \left(\frac{1}{8}B^{6}\mu b2
                                      -\frac{1}{14}B^{7}p - \frac{1}{10}B^{5}\mu\lambda + \frac{1}{7}B^{7}aI u04 + \left(\frac{3}{28}B^{7}\mu b2 - \frac{1}{16}B^{8}p - \frac{1}{12}B^{6}\mu\lambda\right)
                                       +\frac{1}{8}B^{8}a1 u05
        \left(-\frac{1}{8} B^4 a \theta + \frac{3}{16} B^4 a 2 - \frac{1}{24} q \mu B^3\right) u 1 1 + \left(\frac{3}{20} B^5 a 2 - \frac{1}{10} B^5 a \theta - \frac{1}{32} q \mu B^4\right) u 1 2
                                      + \left(\frac{1}{8} B^6 a^2 - \frac{1}{12} B^6 a^0 - \frac{1}{40} q \mu B^5\right) u 13 + \left(\frac{3}{28} B^7 a^2 - \frac{1}{14} B^7 a^0 - \frac{1}{48} q \mu B^6\right) u 14
                                      +\left(-\frac{1}{56} q \mu B^7 - \frac{1}{16} B^8 a\theta + \frac{3}{32} B^8 a^2\right) u^{15}
     \left(\frac{1}{6}B^{3}\mu aI - \frac{1}{8}B^{3}\mu p - \frac{1}{6}B^{3}\lambda + \frac{3}{16}B^{4}b2\right)vII + \left(-\frac{3}{32}B^{4}\mu p + \frac{1}{8}B^{4}\mu aI - \frac{1}{8}B^{4}\lambda + \frac{1}{8}B^{4}\mu aI - \frac{1}{8}B^{4}\mu aI - \frac{1}{8}B^{4}\lambda + \frac{1}{8}B^{4}\mu aI - \frac{1}{8}
                                     +\frac{3}{20}B^{5}b^{2}v^{12} + \left(-\frac{3}{40}B^{5}\mu p + \frac{1}{10}B^{5}\mu a^{1} + \frac{1}{8}B^{6}b^{2} - \frac{1}{10}B^{5}\lambda\right)v^{13} + \left(-\frac{3}{40}B^{5}\mu a^{1} + \frac{1}{8}B^{6}\mu a^{2} - \frac{1}{10}B^{5}\mu a^{2} + \frac{1}{10}B^{5}\mu a^{2} + \frac{1}{10}B^{6}\mu a^
                                    -\frac{1}{16}B^{6}\mu p + \frac{1}{12}B^{6}\mu aI - \frac{1}{12}B^{6}\lambda + \frac{3}{28}B^{7}b2 vI4 + \left(-\frac{3}{56}B^{7}\mu p + \frac{1}{14}B^{7}\mu aI\right)
```

$$\begin{array}{l} + \frac{3}{32}B^8b2 - \frac{1}{14}B^7\lambda \right) vl5 \\ \left(\frac{1}{8}B^2\mu\lambda + \frac{1}{16}B^4p \right) u2l + \left(\frac{1}{12}B^3\mu\lambda + \frac{1}{20}B^5p \right) u22 + \left(\frac{1}{16}B^4\mu\lambda + \frac{1}{24}B^6p \right) u23 \\ + \left(\frac{1}{20}B^5\mu\lambda + \frac{1}{28}B^7p \right) u24 + \left(-\frac{1}{14}B^7\mu b2 + \frac{1}{24}B^6\mu\lambda + \frac{1}{32}B^8p \right) u25 \\ \left(-\frac{1}{12}B^3\mu a\theta - \frac{1}{16}qB^4 \right) v2l + \left(-\frac{1}{16}B^4\mu a\theta - \frac{1}{20}qB^5 \right) v22 + \left(-\frac{1}{20}B^5\mu a\theta - \frac{1}{14}B^7\mu a^2 - \frac{1}{32}B^8q \right) v23 \\ - \frac{1}{24}B^6q \right) v23 + \left(-\frac{1}{24}B^6\mu a\theta - \frac{1}{28}B^7q \right) v24 + \left(-\frac{1}{28}B^7\mu a\theta + \frac{1}{14}B^7\mu a^2 - \frac{1}{32}B^8q \right) v25 \\ > \text{exl(p);exl(q);exl(lambda);exl(theta[0]);exl(theta[TW]);exl(a0);exl(a1);exl(b1);exl(a0^2);exl(a2^2);exl(a2^2);exl(b2); \\ \left(-\frac{1}{16}B^2\mu al - \frac{1}{8}B^4\theta_{TW} - \frac{1}{6}B^3\theta_0 - \frac{1}{2}B^2\lambda + \frac{5}{12}B^3b^2\right)p \\ \left(-\frac{1}{16}B^2\mu bl + \frac{5}{12}B^3al - \frac{1}{6}B^3a\theta\right)q \\ \left(-\frac{1}{4}B\mu b2 - \frac{1}{2}B\theta_0\mu - \frac{1}{4}B^2\mu\theta_{TW} + \frac{3}{4}B^2al\right)\lambda \\ \left(\frac{3}{8}B^2\mu b2 + \frac{1}{3}B^3al\right)\theta_0 \\ \left(\frac{1}{4}B^3\mu b2 + \frac{1}{4}B^4al\right)\theta_{TW} \\ \left(-\frac{1}{2}B^2\mu a2 - \frac{1}{6}B^3bl\right)a\theta \\ - \frac{1}{4}B^3alb2 \\ \frac{1}{4}B^2\mu a\theta^2 \\ \frac{1}{4}B^2\mu a\theta^2 \\ \frac{1}{4}B^2\mu a\theta^2 \\ 0 \\ 0 \\ \text{ (46)} \\ > \text{ input;} \\ > \text{ HpP1:= b*combine(dHp/Kf,trig):} \\ > \text{ HpP2:= b*combine(dHp/Kf,trig):} \\ > \text{ HpP1:= b*combine(dHp/Kf,trig)$$

:= coeff(HpP,cos(2\*psi)):

Periodic component of rear induced coefficient

```
> HiP := b*combine(dHi/Kf,trig) :
                                   HiP2S := coeff(HiP,sin(2*psi)):
                                   HiP2C := coeff(HiP,cos(2*psi)):
           Profile mean value over one rev, b blades
            > Yp := b/(2*Pi)*int(dYp,psi=0..2*Pi);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           Yp := 0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      (48)
          Induced mean value over one rev, b blades
                                           Yi := simplify(b/(2*Pi)*int(dYi,psi=0..2*Pi)) :
          Induced coefficient
     > CYi := truncate(Yi/Kf,5): Yi := Kf*CYi:
        > input := 2*CYi/a:
              \left(\frac{1}{8} q B^4 - \frac{1}{4} B^3 \mu a^2 + \frac{1}{4} B^4 b I - \frac{1}{2} B^3 \mu a^0 + \frac{1}{4} B^2 \mu^2 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{1}{5} B^5 b I\right) u^0 I + \left(\frac{1}{10} q B^5 + \frac{1}{5} B^5 b I + \frac{
                                                     +\frac{1}{6}B^{3}\mu^{2}bI - \frac{3}{16}B^{4}\mu a2 - \frac{3}{8}B^{4}\mu a0 u02 + \left(\frac{1}{12}B^{6}q + \frac{1}{6}B^{6}bI + \frac{1}{8}B^{4}\mu^{2}bI\right)
                                                   -\frac{3}{10}B^{5}\mu a0 - \frac{3}{20}B^{5}\mu a2 u03 + \left(\frac{1}{14}B^{7}q + \frac{1}{7}B^{7}bI + \frac{1}{10}B^{5}\mu^{2}bI - \frac{1}{4}B^{6}\mu a0\right)
                                                   -\frac{1}{8}B^{6}\mu a2 u04 + \left(\frac{1}{16}B^{8}q + \frac{1}{8}B^{8}bI + \frac{1}{12}B^{6}\mu^{2}bI - \frac{3}{14}B^{7}\mu a0\right)
                                                  -\frac{3}{28} B^7 \mu a^2 u^{05}
           \left(\frac{1}{6}B^{3}\lambda + \frac{3}{16}B^{4}b^{2} + \frac{1}{6}B^{3}\mu aI + \frac{1}{24}B^{3}\mu p\right)uII + \left(\frac{3}{20}B^{5}b^{2} + \frac{1}{8}B^{4}\lambda + \frac{1}{8}B^{4}\mu aI\right)uII + \left(\frac{3}{20}B^{5}b^{2} + \frac{1}{8}B^{5}\lambda + \frac{1}{8}B^{5}\mu aI\right)uII + \left(\frac{3}{20}B^{5}b^{2} + \frac{1}{8}B^{5}\lambda + \frac{1}{8}B^{5}\mu aI\right)uII + \left(\frac{3}{20}B^{5}b^{2} + \frac{1}{8}B^{5}\lambda + \frac{1}{8}B^{5}\mu aI\right)uII + \left(\frac{3}{20}B^{5}\lambda + \frac{1}{8}B^{5}\lambda + \frac{1}{8}B^{
                                                  +\frac{1}{32}B^{4}\mu p u_{12} + \left(\frac{1}{8}B^{6}b_{2} + \frac{1}{10}B^{5}\lambda + \frac{1}{10}B^{5}\mu a_{1} + \frac{1}{40}B^{5}\mu p\right)u_{13} + \left(\frac{3}{28}B^{7}b_{2}\right)u_{13} + \left(\frac{
                                                   +\frac{1}{12}B^{6}\lambda + \frac{1}{12}B^{6}\mu aI + \frac{1}{48}B^{6}\mu p uI4 + \left(\frac{3}{32}B^{8}b2 + \frac{1}{14}B^{7}\lambda + \frac{1}{14}B^{7}\mu aI\right)
                                                   +\frac{1}{56}B^7\mu p + \frac{1}{24}B^6\mu^2 b2 u15
           \left(\frac{1}{3}B^{3}\mu bI + \frac{1}{24}B^{3}\mu q - \frac{1}{4}B^{2}\mu^{2}a0 - \frac{3}{16}B^{4}a2 - \frac{1}{8}B^{4}a0\right)vII + \left(-\frac{1}{10}B^{5}a0\right)vII + \left(-\frac{1}{10}B^{5}a0
                                                   +\frac{1}{32} q \mu B^{4} + \frac{1}{4} B^{4} \mu b I - \frac{1}{6} B^{3} \mu^{2} a 0 - \frac{3}{20} B^{5} a 2 \right) v I 2 + \left(-\frac{1}{12} B^{6} a 0 + \frac{1}{5} B^{5} \mu b I\right)
                                                  -\frac{1}{8}B^{4}\mu^{2}a0 + \frac{1}{40}q\mu B^{5} - \frac{1}{8}B^{6}a2 v13 + \left(\frac{1}{6}B^{6}\mu b1 - \frac{1}{10}B^{5}\mu^{2}a0 + \frac{1}{48}q\mu B^{6}\right)
                                            -\frac{1}{14}B^{7}a0 - \frac{3}{28}B^{7}a2 v14 + \left(-\frac{1}{12}B^{6}\mu^{2}a0 + \frac{1}{7}B^{7}\mu b1 - \frac{1}{24}B^{6}\mu^{2}a2 + \frac{1}{56}B^{7}\mu q\right)
```

$$-\frac{1}{16}B^8 a0 - \frac{3}{32}B^8 a2 \right) v/5$$

$$(\frac{1}{12}B^3 \mu a0 + \frac{1}{16}B^8) u2I + (\frac{1}{20}qB^5 + \frac{1}{16}B^4 \mu a0) u22 + (\frac{1}{20}B^5 \mu a0 + \frac{1}{24}B^6 q) u23$$

$$+ (\frac{1}{28}B^7 q + \frac{1}{24}B^6 \mu a0) u24 + (\frac{1}{32}B^8 q - \frac{1}{24}B^6 \mu^2 bI + \frac{3}{38}B^7 \mu a2$$

$$+ \frac{1}{28}B^7 \mu a0) u25$$

$$(\frac{1}{8}B^2 \mu \lambda + \frac{1}{16}B^4 p) v2I + (\frac{1}{12}B^3 \mu \lambda + \frac{1}{20}B^5 p) v22 + (\frac{1}{16}B^4 \mu \lambda + \frac{1}{24}B^6 p) v23$$

$$+ (\frac{1}{20}B^5 \mu \lambda + \frac{1}{28}B^7 p) v24 + (\frac{3}{28}B^7 \mu b2 + \frac{1}{24}B^6 \mu \lambda + \frac{1}{24}B^6 \mu^2 aI$$

$$+ \frac{1}{32}B^8 p) v25$$

$$= \times x1(p); ex1(q); ex1(lambda); ex1(theta[0]); ex1(theta[TW]); ex1(a0); ex1(a1); ex1(b1); ex1(a2); ex1(b2);$$

$$(-\frac{5}{12}B^3 a2 + \frac{5}{16}B^2 \mu bI - \frac{1}{6}B^3 a0) p$$

$$(\frac{1}{8}B^6 \theta_{TW} + \frac{1}{2}B^2 \lambda + \frac{5}{12}B^3 b2 + \frac{7}{16}B^2 \mu aI + \frac{1}{6}B^3 \theta_0) q$$

$$(\frac{3}{4}B^2 bI + \frac{3}{4}B\mu a2 - \frac{3}{8}B\mu a0) \lambda$$

$$(\frac{1}{2}B\mu^2 bI - \frac{3}{4}B^2 \mu a0 - \frac{3}{8}B^2 \mu a2 + \frac{1}{3}B^3 bI) \theta_0$$

$$(\frac{1}{4}B^2 \mu^2 bI - \frac{3}{2}B^3 \mu a0 - \frac{1}{4}B^3 \mu a2 + \frac{1}{4}B^4 bI) \theta_{TW}$$

$$(\frac{1}{6}B^3 aI - \frac{1}{2}B^2 \mu b2 - B\mu^2 aI) a0$$

$$(\frac{1}{4}B^2 \mu bI + \frac{1}{4}B^3 a2) aI$$

$$\frac{1}{4}B^3 bI b2$$

$$0$$

$$0$$

$$= \text{Periodic component of lateral profile coefficient}$$

$$> \text{YpP} := b*combine(dYp/Kf, trig) :}$$

$$> \text{YpPC} := coeff(YpP, sin(2*psi)) :}$$
Periodic component of lateral induced coefficient   

$$> \text{YpP} := b*combine(dYi/Kf, trig) :}$$

```
> YiP1C := coeff(YiP,cos(psi)):
     Rotor torque
             Profile mean value over one rev, b blades
           > Qp := simplify(b/(2*Pi)*(int(dQp,psi=0..2*Pi)-2*int(dQpInv,psi=
                                                                                                                                                                                                                 Qp := \frac{1}{64} b R^4 \rho \delta c \Omega^2 (-8 - 8 \mu^2 + \mu^4)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         (52)
        Profile coefficient
           > CQp := simplify(Qp/Kq);
                                                                                                                                                                                                                                                       CQp := \frac{1}{64} \delta \left( -8 - 8 \mu^2 + \mu^4 \right)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         (53)
        Induced mean value over one rev, b blades
          > Qi := simplify(b/(2*Pi)*(int(dQi,psi=0..2*Pi)-2*int(dQiInv,psi=
        Induced torque coefficient. Force dependency of mu
     > CQi := truncate(Qi/Kq,5): Qi := Kq*CQi:
    > input := 2*CQi/a:
         > ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5); 
 \left(\frac{1}{4}B^4\lambda + \frac{1}{8}\mu B^4p + \frac{1}{12}\mu^2 B^3b2 + \frac{1}{32}\mu^4\lambda\right)u01 + \left(\frac{1}{5}B^5\lambda + \frac{1}{10}\mu B^5p\right)
                                          +\frac{1}{24} \mu^2 B^6 b^2 u04 + \left(\frac{1}{8} B^8 \lambda + \frac{1}{16} \mu B^8 p + \frac{1}{28} \mu^2 B^7 b^2\right) u05
         \left(\frac{1}{10}B^{5}q - \frac{1}{8}B^{4}\mu a\theta - \frac{1}{16}B^{4}\mu a2 + \frac{1}{24}B^{3}\mu^{2}bI + \frac{1}{10}B^{5}bI\right)uII + \left(\frac{1}{12}B^{6}bI + \frac{1}{12}B^{6}q\right)uII + \left(\frac{1}{12}B^{6}q\right)uII + \left(\frac{1}{1
                                         -\frac{1}{20} B^{5} \mu a 2 + \frac{1}{32} B^{4} \mu^{2} b 1 - \frac{1}{10} B^{5} \mu a 0 \right) u 1 2 + \left(\frac{1}{14} B^{7} b 1 + \frac{1}{40} B^{5} \mu^{2} b 1\right)
                                         -\frac{1}{24} B^{6} \mu a 2 - \frac{1}{12} B^{6} \mu a 0 + \frac{1}{14} B^{7} q u 1 3 + \left(\frac{1}{16} B^{8} b I + \frac{1}{16} B^{8} q + \frac{1}{48} B^{6} \mu^{2} b I\right)
                                         -\frac{1}{14}B^{7}\mu a0 - \frac{1}{28}B^{7}\mu a2 u14 + \left(\frac{1}{18}B^{9}b1 + \frac{1}{56}B^{7}\mu^{2}b1 - \frac{1}{16}B^{8}\mu a0\right)
                                       -\frac{1}{32}B^8 \mu a^2 + \frac{1}{18}B^9 q u^{15}
         \left(\frac{1}{10}B^{5}p - \frac{1}{16}B^{4}\mu b2 + \frac{1}{24}B^{3}\mu^{2}aI + \frac{1}{6}B^{3}\mu\lambda - \frac{1}{10}B^{5}aI\right)vII + \left(-\frac{1}{12}B^{6}aI\right)vII + \left(-\frac{1}{12}B^{6}aI
                                    -\frac{1}{20}B^{5}\mu b2 + \frac{1}{32}B^{4}\mu^{2}aI + \frac{1}{8}B^{4}\mu\lambda + \frac{1}{12}B^{6}p\right)vI2 + \left(\frac{1}{10}B^{5}\mu\lambda - \frac{1}{24}B^{6}\mu b2\right)vI2 + \left(\frac{1}{10}B^{6}\mu\lambda - \frac{1}{24}B^{6}\mu\lambda - \frac{1}{2
                                         +\frac{1}{40}B^{5}\mu^{2}aI + \frac{1}{14}B^{7}p - \frac{1}{14}B^{7}aI vI3 + \left(\frac{1}{16}B^{8}p + \frac{1}{48}B^{6}\mu^{2}aI - \frac{1}{28}B^{7}\mu b2\right)
```

$$+ \frac{1}{12} B^{6} \mu \lambda - \frac{1}{16} B^{8} aI \right) vI4 + \left(\frac{1}{18} B^{9} p - \frac{1}{32} B^{8} \mu b2 + \frac{1}{14} B^{7} \mu \lambda + \frac{1}{56} B^{7} \mu^{2} aI \right) - \frac{1}{18} B^{9} aI \right) vI5$$

$$\left(\frac{1}{8} B^{4} \mu aI - \frac{1}{16} \mu B^{4} p + \frac{1}{5} B^{5} b2\right) u2I + \left(\frac{1}{10} B^{5} \mu aI - \frac{1}{20} \mu B^{5} p + \frac{1}{6} B^{6} b2\right) u22 + \left(\frac{1}{7} B^{7} b2 + \frac{1}{12} B^{6} \mu aI - \frac{1}{24} \mu B^{6} p\right) u23 + \left(\frac{1}{8} B^{8} b2 - \frac{1}{28} \mu B^{7} p + \frac{1}{14} B^{7} \mu aI\right) u24 + \left(\frac{1}{9} B^{9} b2 + \frac{1}{16} B^{8} \mu aI - \frac{1}{32} \mu B^{8} p\right) u25$$

$$\left(-\frac{1}{5} B^{5} a2 + \frac{1}{8} B^{4} \mu bI + \frac{1}{16} B^{4} \mu q - \frac{1}{12} B^{3} \mu^{2} a0\right) v2I + \left(-\frac{1}{6} B^{6} a2 + \frac{1}{10} B^{5} \mu bI + \frac{1}{20} B^{5} \mu q - \frac{1}{16} B^{4} \mu^{2} a0\right) v22 + \left(-\frac{1}{7} B^{7} a2 + \frac{1}{12} B^{6} \mu bI + \frac{1}{24} B^{6} q \mu - \frac{1}{20} B^{5} \mu^{2} a0\right) v23 + \left(\frac{1}{14} B^{7} \mu bI - \frac{1}{24} B^{6} \mu^{2} a0 + \frac{1}{28} B^{7} q \mu - \frac{1}{8} B^{8} a2\right) v24 + \left(-\frac{1}{9} B^{9} a2 + \frac{1}{16} B^{8} \mu bI - \frac{1}{28} B^{7} \mu^{2} a0 + \frac{1}{32} B^{8} q \mu\right) v25$$

> ex1(p^2);ex1(p);ex1(q^2);ex1(q);ex1(lambda^2);ex1(lambda);ex1
(a2^2);ex1(a2);ex1(a0^2);ex1(a0);ex1(a1^2);ex1(b1^2);ex1(b2^2);
ex1(b2);

$$\left(-\frac{5}{64} \mu^{4} + \frac{1}{8} B^{4}\right) p^{2}$$

$$\left(-\frac{4}{45} \frac{\mu^{4} \theta_{0}}{\pi} + \frac{1}{8} B^{4} \mu \theta_{TW} + \frac{1}{6} B^{3} \mu \theta_{0} + \frac{1}{6} B^{3} \mu b^{2} - \frac{1}{4} B^{4} a^{2} + \frac{1}{4} \mu^{3} \lambda\right) p$$

$$\left(-\frac{1}{64} \mu^{4} + \frac{1}{8} B^{4}\right) q^{2}$$

$$\left(\frac{8}{45} \frac{\mu^{4} a^{0}}{\pi} + \frac{1}{6} B^{3} \mu a^{2} - \frac{1}{3} B^{3} \mu a^{0} + \frac{1}{4} B^{4} b^{1}\right) q$$

$$\left(\frac{1}{2} B^{2} - \frac{1}{4} \mu^{2}\right) \lambda^{2}$$

$$\left(\frac{1}{32} \mu^{4} \theta_{TW} + \frac{1}{2} B^{2} \mu a^{1} + \frac{1}{4} B^{4} \theta_{TW} + \frac{1}{3} B^{3} \theta_{0} + \frac{2}{9} \frac{\mu^{3} \theta_{0}}{\pi} - \frac{3}{8} \mu^{3} a^{1}\right) \lambda$$

$$\frac{1}{2} B^{4} a^{2}$$

$$\left(-\frac{1}{4} B^{2} \mu^{2} a^{0} - \frac{1}{6} B^{3} \mu b^{1}\right) a^{2}$$

$$\left(\frac{1}{4} B^{2} \mu^{2} - \frac{1}{16} \mu^{4}\right) a^{0}^{2}$$

$$-\frac{1}{3} B^{3} \mu a^{0} b^{1}$$

```
\left(\frac{1}{8}B^4 + \frac{3}{16}B^2\mu^2\right)al^2
                             \left(\frac{1}{8}B^4 + \frac{1}{16}B^2\mu^2\right)bI^2
                                   \frac{1}{2} B^4 b 2^2
                    \left(\frac{1}{8} B^2 \theta_0 \mu^2 + \frac{1}{12} B^3 \mu^2 \theta_{TW} + \frac{1}{6} B^3 \mu aI\right) b2
                                                                                (55)
> input;
                                      0
                                                                                (56)
Periodic component of rotor torque profile coefficient
> QpP := b*combine(dQp/Kq,trig) :
> OpPlS := coeff(OpP,sin(psi)):
> QpP2C := coeff(QpP,cos(2*psi)):
Periodic component of rotor torque induced coefficient
> QiP := b*combine(dQi/Kq,trig) :
> QiP1S := coeff(QiP,sin(psi)):
> QiP1C := coeff(QiP,cos(psi)):
> QiP2S := coeff(QiP,sin(2*psi)):
> OiP2C := coeff(QiP,cos(2*psi)):
Aerodynamic torsional moment
> N := simplify(1/(2*Pi)*int(dN,psi=0..2*Pi)):
Propeller moment
> P := simplify(1/(2*Pi)*int(dP,psi=0..2*Pi)):
Code generation: CQp, CQi
> Java([cqp=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,CQp),cqi=subs
   (theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,CQi)],coercetypes=false,
   optimize=true,output="GyroRotorFiles/CQ.java");
Code generation : CT
> Java([ct=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,CT)],
   coercetypes=false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/CT.java")
Code generation: CHp, CHi, CYi
> Java([chp=CHp,chi=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,CHi),
   cyi=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,CYi)],coercetypes=
   false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/CHCY.java");
Code generation: N
> Java([nx=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,dN)],
   coercetypes=false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/N.java");
Code generation : P (Propeller moment)
> Java([px=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,dP)],
   coercetypes=false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/P.java");
```

```
Code generation: TP1S, TP1C, TP2S, TP2C
> Java([tplS=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,TPlS),tplC=
   subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,TP1C),tp2S=subs(theta[0]=
  theta0,theta[TW]=thetaTW,TP2S),tp2C=subs(theta[0]=theta0,theta
   [TW]=thetaTW,TP2C)],coercetypes=false,optimize=true,output=
   "GyroRotorFiles/TP.java");
Code generation: HpP1S, HpP2C
> Java([hpP1S=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,HpP1S),hpP2C=
   subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,HpP2C)],coercetypes=
   false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/Hp.java");
Code generation: HiP1S, HiP1C, HiP2S, HiP2C
> Java([hiP1S=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,HiP1S),hiP1C=
   subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,HiP1C),hiP2S=subs(theta
   [0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,HiP2S),hiP2C=subs(theta[0]=theta0,
   theta[TW]=thetaTW,HiP2C)],coercetypes=false,optimize=true,
   output="GyroRotorFiles/Hi.java");
Code generation: YpP1C, YpP2S
> Java([ypP1C=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,YpP1C),ypP2S=
   subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,YpP2S)],coercetypes=
   false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/Yp.java");
Code generation: YiP1S, YiP1C, YiP2S, YiP2C
> Java([yiP1S=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,YiP1S),yiP1C=
   subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,YiP1C),yiP2S=subs(theta
   [0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,YiP2S),yiP2C=subs(theta[0]=theta0,
  theta[TW]=thetaTW,YiP2C)],coercetypes=false,optimize=true,
   output="GyroRotorFiles/Yi.java");
_Code generation : QpP1S, QpP2C
> Java([qpP1S=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,QpP1S),qpP2C=
   subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,QpP2C)],coercetypes=
   false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/Qp.java");
Code generation: QiP1S, QiP1C, QiP2S, QiP2C
> Java([qiP1S=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,QiP1S),qiP1C=
   subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,QiP1C),qiP2S=subs(theta
   [0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,QiP2S),qiP2C=subs(theta[0]=theta0,
   theta[TW]=thetaTW,OiP2C)],coercetypes=false,optimize=true,
   output="GyroRotorFiles/Qi.java");
Compute torsional deformation coefficient
Total integral torsionnal moment
> NP := int(dN+dP,x=0..x):
> NP := combine(NP, trig):
Deformation equation
> DP := K*nu-NP:
> DP := subs(cos(psi)=cpsi,sin(psi)=spsi,cos(2*psi)=c2psi,sin(2*
```

```
psi)=s2psi,cos(3*psi)=0,sin(3*psi)=0,cos(4*psi)=0,sin(4*psi)=0,
> DP := subs(x^6=0,x^7=0,x^8=0,x^9=0,DP):
   Define matrix to solve linear system
   > m := Matrix(25,25);
                                                                                                                 m := Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       (57)
   > n := Vector(25);
                                                                                                                 n := \begin{bmatrix} 1 .. 25 \ Vector_{column} \\ Data \ Type: \ anything \\ Storage: \ rectangular \\ Order: \ Fortran\_order \end{bmatrix}
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       (58)
  Torsional inertia force for plotting
   > S := Omega^2*Icb*((u11*x+u12*x^2+u13*x^3+u14*x^4+u15*x^5)*cos
                (psi)+(v11*x+v12*x^2+v13*x^3+v14*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v12*x^4+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+4*(u21*x+v15*x^5)*sin(psi)+
               u22*x^2+u23*x^3+u24*x^4+u25*x^5)*cos(2*psi)+4*(v21*x+v22*x^2+
               v23*x^3+v24*x^4+v25*x^5)*sin(2*psi));
  S := \Omega^2 Icb \left( (u11 x + u12 x^2 + u13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^3 + u14 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^4 + u15 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^2 + v13 x^4 + u15 x^4 + u15 x^4 + u15 x^4 + u15 x^5) \cos(\psi) + (v11 x + v12 x^4 + u15 x^4 +
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       (59)
                  +v14x^4+v15x^5) \sin(\psi)+4(u21x+u22x^2+u23x^3+u24x^4+u25x^5)\cos(2\psi)
                  +4 \left(v21 x + v22 x^2 + v23 x^3 + v24 x^4 + v25 x^5\right) \sin(2 \psi)
  Flaping equation
 > unassign('beta(psi)');
   > A := diff(beta(psi),[psi$2])+beta(psi) + 2*q*sin(psi) - 2*p*cos
                (psi);
                                                                         A := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\psi^2} \beta(\psi) + \beta(\psi) + 2 q \sin(\psi) - 2 p \cos(\psi)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       (60)
  Two orders Fourier series [Eq.]
   > beta(psi) := a0-a1*cos(psi)-b1*sin(psi)-a2*cos(2*psi)-b2*sin(2*
               psi);
                                              \beta(\psi) := a0 - a1\cos(\psi) - b1\sin(\psi) - a2\cos(2\psi) - b2\sin(2\psi)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       (61)
  > AP := subs(cos(psi)=cpsi,sin(psi)=spsi,cos(2*psi)=c2psi,sin(2*
               psi)=s2psi,A);
                                                                      AP := 3 \ a2 \ c2psi + 3 \ b2 \ s2psi + a0 + 2 \ q \ spsi - 2 \ p \ cpsi
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       (62)
  Fourrier coefficient of nominal flow
  > dMR1 := combine(dMR,trig):
```

```
> dMR1 := subs(sin(3*psi)=0,cos(3*psi)=0,sin(4*psi)=0,cos(4*psi)=
          0,sin(5*psi)=0,cos(5*psi)=0,sin(6*psi)=0,cos(6*psi)=0,sin(7*psi)
          =0,\cos(7*psi)=0,\sin(8*psi)=0,\cos(8*psi)=0,\sin(9*psi)=0,\cos(9*psi)=0
          psi)=0,sin(10*psi)=0,cos(10*psi)=0,sin(psi)=spsi,cos(psi)=cpsi,
          sin(2*psi)=s2psi,cos(2*psi)=c2psi,dMR1):
  > A1 := coeff(dMR1,cpsi): B1 := coeff(dMR1,spsi) : A2 := coeff
          (dMR1,c2psi) : B2 := coeff(dMR1,s2psi) :
> A0 := simplify(dMR1-A1*cpsi-B1*spsi-A2*c2psi-B2*s2psi):
 Fourrier coefficient of reverse flow
 > dMR2 := combine(-2*dMRInv,trig):
  > dMR2 := subs(sin(3*psi)=0,cos(3*psi)=0,sin(4*psi)=0,cos(4*psi)=
          0,sin(5*psi)=0,cos(5*psi)=0,sin(6*psi)=0,cos(6*psi)=0,sin(7*psi)
          =0,\cos(7*psi)=0,\sin(8*psi)=0,\cos(8*psi)=0,\sin(9*psi)=0,\cos(9*psi)=0
          psi)=0,sin(10*psi)=0,cos(10*psi)=0,sin(11*psi)=0,cos(11*psi)=0,
          sin(psi)=spsi,cos(psi)=cpsi,sin(2*psi)=s2psi,cos(2*psi)=c2psi,
          dMR2):
 > dA1 := coeff(dMR2,cpsi) : dB1 := coeff(dMR2,spsi) : dA2 := coeff
          (dMR2,c2psi) : dB2 := coeff(dMR2,s2psi) :
> dA0 := simplify(dMR2-dA1*cpsi-dB1*spsi-dA2*c2psi-dB2*s2psi):
LCombined fourier coefficient
> C0 := A0-dB1/Pi+(1/2)*dA0:
> C1 := A1-(4/3)*dB2/Pi:
 > D1 := B1+(1/2)*dB1-(8/3)*dA0/Pi:
 > C2 := A2-(1/2)*dA0+(2/3)*dB1/Pi:
 > D2 := B2+(1/2)*dB2:
 > dMRc := (C0+C1*cpsi+D1*spsi+C2*c2psi+D2*s2psi)/Ib/Omega^2 :
 Gamma is the Lock number [Eq.]
  > Ib := rho*a*c*R^4/Gamma ;
                                                                                     Ib := \frac{\rho \ a \ c \ R^4}{\Gamma}
                                                                                                                                                                                                            (63)
 > dMRc := truncate(dMRc,5):
 Code generation : dMRc
  > Java([Mx=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,dMRc)],
          coercetypes=false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/M.java");
 Flapping moment coefficient
 > input := simplify(coeff(2*dMRc/Gamma,cpsi)):
 > residual := input*cpsi:
  > ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);
   \left(\frac{1}{5}B^5 + \frac{1}{12}\mu^2B^3\right)u11 + \left(\frac{1}{6}B^6 + \frac{1}{16}\mu^2B^4\right)u12 + \left(\frac{1}{7}B^7 + \frac{1}{20}\mu^2B^5\right)u13 + \left(\frac{1}{8}B^8\right)u13 + \left(\frac{1}{8}B^8\right
```

$$+ \frac{1}{24} \mu^2 B^8 \right) uI4 + \left( \frac{1}{9} B^9 + \frac{1}{28} \mu^2 B^7 \right) uI5$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{1}{4} \mu B^4 v2I + \frac{1}{5} \mu B^5 v22 + \frac{1}{6} \mu B^6 v23 + \frac{1}{7} \mu B^7 v24 + \frac{1}{8} \mu B^8 v25$$

$$(64)$$

$$= \exp(p) \exp(q) \exp(1 \pmod{p} \exp(1 \pmod{p}) \exp(1 \pmod{p})$$

$$(1 \pmod$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{6} \mu B^3 b2 \\ \\ \left(\frac{2}{3} \mu B^3 + \frac{1}{6} \frac{\mu^4}{\pi}\right) \theta_0 \\ \\ \frac{1}{2} \mu B^4 \theta_{TW} \\ \\ 0 \\ \left(\frac{1}{8} B^2 \mu^2 - \frac{1}{4} B^4\right) aI \\ \\ 0 \\ \left(\frac{1}{8} B^2 \mu^2 - \frac{1}{4} B^4\right) aI \\ \\ 0 \\ \end{array} \right) \\ \begin{array}{c} (67) \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{(67)} \\ \text{> input := simplify(coeff(2*dMRc/Gamma,c2psi)):} \\ \text{> residual := residual + input*c2psi:} \\ \text{> ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);} \\ \\ -\frac{1}{6} \mu^2 B^3 u0I - \frac{1}{8} \mu^2 B^4 u02 - \frac{1}{10} \mu^2 B^5 u03 - \frac{1}{12} \mu^2 B^6 u04 - \frac{1}{14} \mu^2 B^7 u05 \\ \\ 0 \\ \\ -\frac{1}{4} \mu B^4 vII - \frac{1}{5} \mu B^5 vI2 - \frac{1}{6} \mu B^6 vI3 - \frac{1}{7} \mu B^7 vI4 - \frac{1}{8} \mu B^8 vI5 \\ \\ \left(\frac{1}{6} \mu^2 B^3 + \frac{1}{5} B^5\right) u2I + \left(\frac{1}{8} \mu^2 B^4 + \frac{1}{6} B^6\right) u22 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^5 + \frac{1}{7} B^7\right) u23 + \left(\frac{1}{12} \mu^2 B^6 + \frac{1}{8} B^8\right) u24 + \left(\frac{1}{14} \mu^2 B^7 + \frac{1}{9} B^9\right) u25 \\ \\ \text{> ex1(p);ex1(q);ex1(lambda);ex1(a2);ex1(b2);ex1(theta[0]);ex1(theta[TW]);ex1(a0);ex1(a1);ex1(b1);} \\ \left(-\frac{1}{6} \mu B^3 + \frac{5}{72} \frac{\mu^4}{\pi}\right) p \\ \\ 0 \\ \\ -\frac{1}{6} \frac{\mu^3 \lambda}{\pi} \\ \\ 0 \\ \\ -\frac{1}{6} \mu^2 B^3 \theta_{TW} \\ \\ 0 \\ \\ -\frac{1}{6} \mu^2 B^3 \theta_{TW} \\ \\ 0 \\ \\ \frac{1}{2} \mu B^3 aI \end{array}$$

/**C**O\

```
0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  (69)
                                                                                                                             \frac{1}{4} \mu B^4 u 11 + \frac{1}{5} \mu B^5 u 12 + \frac{1}{6} \mu B^6 u 13 + \frac{1}{7} \mu B^7 u 14 + \frac{1}{8} \mu B^8 u 15
 \left(\frac{1}{6} \mu^2 B^3 + \frac{1}{5} B^5\right) v2I + \left(\frac{1}{8} \mu^2 B^4 + \frac{1}{6} B^6\right) v22 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^5 + \frac{1}{7} B^7\right) v23 + \left(\frac{1}{12} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^5 + \frac{1}{7} B^7\right) v23 + \left(\frac{1}{12} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^5 + \frac{1}{7} B^7\right) v23 + \left(\frac{1}{12} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^5 + \frac{1}{7} B^7\right) v23 + \left(\frac{1}{12} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^5 + \frac{1}{7} B^7\right) v23 + \left(\frac{1}{12} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6 + \frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10} \mu^2 B^6\right) v24 + \left(\frac{1}{10
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  (70)
                                        +\frac{1}{8}B^{8}) v24 + \left(\frac{1}{14}\mu^{2}B^{7} + \frac{1}{9}B^{9}\right)v25
                          ex1(p);ex1(q);ex1(lambda);ex1(a2);ex1(b2);ex1(theta[0]);ex1
(theta[TW]);ex1(a0);ex1(a1);ex1(b1);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           \frac{1}{6} \mu B^3 q
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         \left(\frac{1}{24} \mu^4 - \frac{1}{4} B^2 \mu^2\right) a\theta
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  (71)
                                                                                                                                                                                       mplify(simplify(2*dMRc/Gamma) - residual):
> ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);

\left(\frac{1}{6}\mu^{2}B^{3} + \frac{1}{5}B^{5}\right)u01 + \left(\frac{1}{8}\mu^{2}B^{4} + \frac{1}{6}B^{6}\right)u02 + \left(\frac{1}{10}\mu^{2}B^{5} + \frac{1}{7}B^{7}\right)u03 + \left(\frac{1}{12}\mu^{2}B^{6}\right)u03 + \left(\frac{1}{12}\mu^{2}
                                        +\frac{1}{8}B^{8} u04 + \left(\frac{1}{14}\mu^{2}B^{7} + \frac{1}{9}B^{9}\right)u05
                                                                                                                                   \frac{1}{4} \mu B^4 v I I + \frac{1}{5} \mu B^5 v I 2 + \frac{1}{6} \mu B^6 v I 3 + \frac{1}{7} \mu B^7 v I 4 + \frac{1}{8} \mu B^8 v I 5
                                                                      -\frac{1}{12} \mu^{2} B^{3} u21 - \frac{1}{16} \mu^{2} B^{4} u22 - \frac{1}{20} \mu^{2} B^{5} u23 - \frac{1}{24} \mu^{2} B^{6} u24 - \frac{1}{28} \mu^{2} B^{7} u25
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  (72)
                                     ex1(p);ex1(q);ex1(lambda);ex1(a2);ex1(b2);ex1(theta[0]);ex1
```

```
\left(\frac{1}{6} \mu B^3 - \frac{5}{48} \frac{\mu'}{\pi}\right) p
                                           \left(\frac{1}{3}B^3 + \frac{1}{4}\frac{\mu^3}{\pi}\right)\lambda
                                               \frac{1}{2} \mu^2 B^2 b2
                                     \left(\frac{1}{4} B^2 \mu^2 - \frac{1}{32} \mu^4 + \frac{1}{4} B^4\right) \theta_0
                                         \left(\frac{1}{6}\,\mu^2\,B^3 + \frac{1}{5}\,B^5\right)\,\Theta_{TW}
                                                                                                               (73)
Final flapping equation
> AP := AP - dMRc:
Sine and cosine coefficient
> Aspsi := coeff(AP,spsi): Acpsi := coeff(AP,cpsi): As2psi :=
    coeff(AP,s2psi): Ac2psi := coeff(AP,c2psi):
Constant term
> Acst := simplify(AP-Aspsi*spsi-Acpsi*cpsi-As2psi*s2psi-Ac2psi*
    c2psi):
Flapping coefficient equations
> eq1 := Acst = 0 : eq2 := Aspsi = 0 : eq3 := Acpsi = 0 : eq4 :=
    As2psi = 0 : eq5 := Ac2psi = 0:
Solution
> solve({eq1,eq2,eq3},{a0,a1,b1}):
> assign(%) ;
Code generation: a0, a1, b1
> Java([ga0=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,a0),ga1=subs
     (theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,a1),gb1=subs(theta[0]=theta0,
    theta[TW]=thetaTW,b1)],coercetypes=false,optimize=true,output=
     "GyroRotorFiles/a0a1b1.java");
Conning angle
\frac{1}{16} \Gamma \mu B^8 v I 5 + \frac{1}{12} \Gamma \mu B^3 p + \frac{1}{8} \Gamma \mu^2 B^2 \theta_0 + \frac{1}{28} \Gamma \mu^2 B^7 u 0 5 + \frac{1}{20} \Gamma \mu^2 B^5 u 0 3
                                                                                                               (74)
    +\frac{1}{12} \Gamma \mu^{2} B^{3} \theta_{TW} + \frac{1}{24} \Gamma \mu^{2} B^{6} u 0 4 + \frac{1}{12} \Gamma \mu^{2} B^{3} u 0 1 + \frac{1}{16} \Gamma \mu^{2} B^{4} u 0 2 - \frac{1}{56} \Gamma \mu^{2} B^{7} u 2 5
```

(theta[TW]);ex1(a0);ex1(a1);ex1(b1);

$$\begin{split} & + \frac{1}{14} \Gamma B^7 u 0 3 + \frac{1}{16} \Gamma B^8 u 0 4 + \frac{1}{18} \Gamma B^9 u 0 5 + \frac{1}{10} \Gamma B^5 u 0 1 + \frac{1}{6} \Gamma B^3 \lambda + \frac{1}{8} \Gamma B^4 \theta_0 \\ & + \frac{1}{10} \Gamma B^5 \theta_{TW} + \frac{1}{12} \Gamma B^6 u 0 2 + \frac{1}{8} \frac{\Gamma \mu^3 \lambda}{\pi} - \frac{1}{64} \Gamma \mu^4 \theta_0 - \frac{5}{96} \frac{\Gamma \mu^4 p}{\pi} + \frac{1}{16} \Gamma \mu^2 B^2 b 2 \\ & + \frac{1}{8} \Gamma \mu B^4 v 1 1 + \frac{1}{10} \Gamma \mu B^5 v 1 2 + \frac{1}{12} \Gamma \mu B^6 v 1 3 + \frac{1}{14} \Gamma \mu B^7 v 1 4 - \frac{1}{24} \Gamma \mu^2 B^3 u 2 1 \\ & - \frac{1}{32} \Gamma \mu^2 B^4 u 2 2 - \frac{1}{40} \Gamma \mu^2 B^5 u 2 3 - \frac{1}{48} \Gamma \mu^2 B^6 u 2 4 \end{split}$$

$$> ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);$$

> input := simplify(2\*a0/Gamma):  
> ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);  

$$\left(\frac{1}{6}\mu^{2}B^{3} + \frac{1}{5}B^{5}\right)u01 + \left(\frac{1}{8}\mu^{2}B^{4} + \frac{1}{6}B^{6}\right)u02 + \left(\frac{1}{10}\mu^{2}B^{5} + \frac{1}{7}B^{7}\right)u03 + \left(\frac{1}{12}\mu^{2}B^{6} + \frac{1}{8}B^{8}\right)u04 + \left(\frac{1}{14}\mu^{2}B^{7} + \frac{1}{9}B^{9}\right)u05$$

$$\frac{1}{4} \mu B^{4} v I I + \frac{1}{5} \mu B^{5} v I 2 + \frac{1}{6} \mu B^{6} v I 3 + \frac{1}{7} \mu B^{7} v I 4 + \frac{1}{8} \mu B^{8} v I 5$$

$$-\frac{1}{12} \mu^{2} B^{3} u 2 I - \frac{1}{16} \mu^{2} B^{4} u 2 2 - \frac{1}{20} \mu^{2} B^{5} u 2 3 - \frac{1}{24} \mu^{2} B^{6} u 2 4 - \frac{1}{28} \mu^{2} B^{7} u 2 5$$

$$0$$

ex1(p) ; ex1(q) ; ex1(a2) ; ex1(b2) ; ex1(lambda) ; ex1(theta[0]

$$\left(\frac{1}{6} \mu B^{3} - \frac{5}{48} \frac{\mu^{4}}{\pi}\right) p$$

$$\frac{1}{8} \mu^{2} B^{2} b 2$$

$$\left(\frac{1}{3} B^{3} + \frac{1}{4} \frac{\mu^{3}}{\pi}\right) \lambda$$

$$\left(\frac{1}{4} B^{2} \mu^{2} - \frac{1}{32} \mu^{4} + \frac{1}{4} B^{4}\right) \theta_{0}$$

$$\left(\frac{1}{6} \mu^{2} B^{3} + \frac{1}{5} B^{5}\right) \theta_{TW}$$
(76)

(75)

Longitudinal flapping

> expand(a1);  

$$-\frac{B^{6} \mu u 25}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{4}{3} \frac{\mu^{4} \theta_{0}}{B^{2} \pi \left(-\mu^{2} + 2 B^{2}\right)} + \frac{4 B^{2} \mu \theta_{TW}}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} - \frac{\mu^{3} \lambda}{B^{2} \left(-\mu^{2} + 2 B^{2}\right)}$$
(77)

$$+ \frac{5}{12} \frac{\mu^{4} p}{B^{2} (-\mu^{2} + 2 B^{2})} - \frac{4}{3} \frac{B \mu b 2}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{2 B \mu^{2} v I I}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{3}{2} \frac{B^{2} \mu^{2} v I 2}{-\mu^{2} + 2 B^{2}}$$

$$+ \frac{6}{5} \frac{B^{3} \mu^{2} v I 3}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{B^{4} \mu^{2} v I 4}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} - \frac{2 B^{2} \mu u 2 I}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{16}{3} \frac{B \mu \theta_{0}}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{4 \mu \lambda}{-\mu^{2} + 2 B^{2}}$$

$$+ \frac{8}{3} \frac{B^{4} \mu u 0 3}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{6}{7} \frac{B^{5} \mu^{2} v I 5}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{2 B^{6} \mu u 0 5}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{16}{7} \frac{B^{5} \mu u 0 4}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{16}{5} \frac{B^{3} \mu u 0 2}{-\mu^{2} + 2 B^{2}}$$

$$+ \frac{4 B^{2} \mu u 0 I}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} - \frac{8}{7} \frac{B^{5} \mu u 2 4}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} - \frac{8}{5} \frac{B^{3} \mu u 2 2}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} - \frac{4}{3} \frac{B^{4} \mu u 2 3}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{8}{9} \frac{B^{7} v I 5}{-\mu^{2} + 2 B^{2}}$$

$$+ \frac{2 B^{2} p}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{8}{5} \frac{B^{3} v I I}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{4}{3} \frac{B^{4} v I 2}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{8}{7} \frac{B^{5} v I 3}{-\mu^{2} + 2 B^{2}} + \frac{B^{6} v I 4}{-\mu^{2} + 2 B^{2}}$$

$$- \frac{32 q}{\Gamma B^{2} (-\mu^{2} + 2 B^{2})}$$

input := simplify(a1/(2\*mu/(B^4-1/2\*mu^2\*B^2)

> ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);

$$B^4 u01 + \frac{4}{5} B^5 u02 + \frac{2}{3} B^6 u03 + \frac{4}{7} B^7 u04 + \frac{1}{2} B^8 u05$$

$$\left(\frac{1}{2} \mu B^{3} + \frac{2}{5} \frac{B^{5}}{\mu}\right) vII + \left(\frac{3}{8} \mu B^{4} + \frac{1}{3} \frac{B^{6}}{\mu}\right) vI2 + \left(\frac{3}{10} \mu B^{5} + \frac{2}{7} \frac{B^{7}}{\mu}\right) vI3 + \left(\frac{1}{4} \mu B^{6} + \frac{1}{4} \frac{B^{8}}{\mu}\right) vI4 + \left(\frac{3}{14} \mu B^{7} + \frac{2}{9} \frac{B^{9}}{\mu}\right) vI5$$

$$-\frac{1}{2} B^{4} u2I - \frac{2}{5} B^{5} u22 - \frac{1}{3} B^{6} u23 - \frac{2}{7} B^{7} u24 - \frac{1}{4} B^{8} u25$$

(78)

ex1(q); ex1(a2); ex1(b2); ex1(l

$$\left(\frac{1}{2} \frac{B^4}{\mu} + \frac{5}{48} \mu^3\right) p$$

$$-\frac{8 q}{\Gamma \mu}$$

$$0$$

$$-\frac{1}{3} B^3 b 2$$

$$\left(B^2 - \frac{1}{4} \mu^2\right) \lambda$$

$$\left(\frac{4}{3} B^3 + \frac{1}{3} \frac{\mu^3}{\pi}\right) \theta_0$$

```
B^4 \Theta_{TW}
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      (79)
 Lateral flapping
    > blr := simplify(b1-4*mu/(B^4+1/2*mu^2*B^2)*a0*(1/3*B^3+1/9*)
b1r := -\frac{1}{630} \frac{1}{R^2 \Gamma \left(11^2 + 2R^2\right)} \left(20160 p + 560 \Gamma B^9 u15 + 1260 \Gamma B^4 q + 630 \Gamma B^8 u14\right)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      (80)
                          +630 Γ \mu B^8 v25 + 1260 Γ \mu B^4 v21 + 180 Γ \mu^2 B^7 u15 + 840 Γ \mu B^6 v23 + 720 Γ \mu B^7 v24
                           -840 \Gamma \mu B^3 a^2 + 1008 \Gamma B^5 u^2 + 1008 \Gamma B^5 u^2 + 1008 \Gamma B^6 u^2 + 1
                          +720 \Gamma B^7 u 13 + 252 \Gamma \mu^2 B^5 u 13 + 210 \Gamma \mu^2 B^6 u 14 + 1008 \Gamma \mu B^5 v 22
> blbis := 4*mu/(B^4+1/2*mu^2*B^2)*a0bis*(1/3*B^3+1/9*mu^3/Pi)+
b1bis := \frac{4 \,\mu \,a0bis \left(\frac{1}{3} \,B^3 + \frac{1}{9} \,\frac{\mu^3}{\pi}\right)}{B^4 + \frac{1}{2} \,B^2 \,\mu^2} - \frac{1}{630} \,\frac{1}{B^2 \,\Gamma \left(\mu^2 + 2 \,B^2\right)} \left(20160 \,p + 560 \,\Gamma \,B^9 \,u15\right)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      (81)
                          + 1260 \Gamma B^4 q + 630 \Gamma B^8 u 14 + 630 \Gamma \mu B^8 v 25 + 1260 \Gamma \mu B^4 v 21 + 180 \Gamma \mu^2 B^7 u 15
                          +840 \Gamma \mu B^6 v23 +720 \Gamma \mu B^7 v24 -840 \Gamma \mu B^3 a2 +1008 \Gamma B^5 u11 +420 \Gamma \mu^2 B^3 u11
                          +840 \Gamma B^{6} u12 + 315 \Gamma \mu^{2} B^{4} u12 + 720 \Gamma B^{7} u13 + 252 \Gamma \mu^{2} B^{5} u13 + 210 \Gamma \mu^{2} B^{6} u14
                          + 1008 \Gamma \mu B^5 v22
                       input := simplify(b1bis/(4*mu/(B^4+1/2*mu^2*B^2))):
   > ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);
   \left(-\frac{1}{5}\frac{B^{5}}{\mu}-\frac{1}{12}\mu B^{3}\right)u11+\left(-\frac{1}{6}\frac{B^{6}}{\mu}-\frac{1}{16}\mu B^{4}\right)u12+\left(-\frac{1}{7}\frac{B^{7}}{\mu}-\frac{1}{20}\mu B^{5}\right)u13+\left(-\frac{1}{5}\frac{B^{6}}{\mu}-\frac{1}{16}\mu B^{4}\right)u12+\left(-\frac{1}{7}\frac{B^{7}}{\mu}-\frac{1}{20}\mu B^{5}\right)u13+\left(-\frac{1}{5}\frac{B^{6}}{\mu}-\frac{1}{16}\mu B^{6}\right)u13+\left(-\frac{1}{5}\frac{B^{6}}{\mu}-\frac{1}{16}\mu B^{6}\right)u13+\left(-\frac{1}{5}\frac{B^{6}}{\mu}-\frac
                       -\frac{1}{8} \frac{B^8}{\mu} - \frac{1}{24} \mu B^6 \bigg) u I 4 + \left( -\frac{1}{9} \frac{B^9}{\mu} - \frac{1}{28} \mu B^7 \right) u I 5
                                                                                                -\frac{1}{4}B^4v21 - \frac{1}{5}B^5v22 - \frac{1}{6}B^6v23 - \frac{1}{7}B^7v24 - \frac{1}{8}B^8v25
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      (82)
                 ex1(p); ex1(q); ex1(a0bis); ex1(a2); ex1(b2); ex1(lambda);
                        ex1(theta[0]); ex1(theta[TW]);
```

```
\left(\frac{1}{3}B^3 + \frac{1}{9}\frac{\mu^3}{\pi}\right)a0bis
                                                       \frac{1}{6}B^3a2
                                                                                                                             (83)
Second order flapping coefficient solution
> solve({eq4,eq5},{a2,b2}):
> assign(%);
Longitudinal flapping Taylor series
> a2dev := series(a2,mu=0):
Constant term (u2, v2)
 > a20 := simplify(convert(series(a2,mu=0,1),polynom));
a20 := \frac{1}{1260} \frac{1}{B^8 \Gamma^2 + 144} \left( \Gamma B^5 \left( 420 B^5 \Gamma v22 + 3360 B^4 u25 + 504 B^4 \Gamma v21 + 3780 B^3 u24 \right) \right)
                                                                                                                             (84)
      +4320 B^{2} u23 + 5040 B u22 + 6048 u21 + 315 B^{7} \Gamma v24 + 360 B^{6} \Gamma v23 + 280 B^{8} \Gamma v25)
mu factor (u1, v1)
 > a21 := mu*simplify(subs(lambda=0,theta[0]=0,theta[TW]=0,coeff
a21 := -\frac{1}{3780} \frac{1}{R \left(R^8 \Gamma^2 + 144\right)} \left( \mu \left(-2160 \Gamma B^7 v I 3 + 175 B^{13} \Gamma^2 u I 5 + 168 B^{10} \Gamma^2 u I 2 \right) \right)
                                                                                                                             (85)
      +483840 q - 2016 \Gamma B^{6} v_{12} + 1260 B^{8} \Gamma^{2} q + 180 B^{11} \Gamma^{2} u_{13} - 1512 \Gamma B^{5} v_{11}
      +\,126\,B^9\,\Gamma^2\,uII + 180\,B^{12}\,\Gamma^2\,uI4 + 25200\,\Gamma\,B^4\,p - 2100\,\Gamma\,B^9\,vI5 - 2160\,\Gamma\,B^8\,vI4)\,)
mu^2 factor (lambda, theta[0], theta[TW], u0)
 > a22 := mu^2*simplify(subs(u11=0,u12=0,u13=0,u14=0,u15=0,v11=0,
     v12=0,v13=0,v14=0,v15=0,u21=0,u22=0,u23=0,u24=0,u25=0,v21=0,v22=
      0,v23=0,v24=0,v25=0,coeff(a2dev,mu^2)));
a22 := \frac{1}{90720} \frac{1}{R^8 \Gamma^2 + 144} \left( \mu^2 B \Gamma \left( 1088640 B^2 u01 + 5880 B^8 \Gamma^2 \lambda + 3528 B^{10} \Gamma^2 \theta_{TW} \right) \right)
                                                                                                                             (86)
      + 1391040 B \theta_0 + 1088640 B^2 \theta_{TW} + 4410 B^9 \Gamma^2 \theta_0 + 648000 B^5 u04 + 2205 B^{13} \Gamma^2 u04
      + \ 1960 \ \Gamma^{2} \ u05 \ B^{14} + 2520 \ B^{12} \ \Gamma^{2} \ u03 + 2940 \ B^{11} \ \Gamma^{2} \ u02 + 3528 \ B^{10} \ \Gamma^{2} \ u01
      +570240 B^6 u05 + 1451520 \lambda + 749952 B^4 u03 + 889056 B^3 u02)
> a2:= simplify(a20+a21+a22);

a2 := \frac{1}{90720} \frac{1}{B(B^8 \Gamma^2 + 144)} \left(-11612160 \ q \ \mu + 22680 \ \Gamma^2 B^{13} \ v24 + 241920 \ \Gamma B^{10} \ u25 \right)
                                                                                                                             (87)
```

$$+ 25920 \Gamma^2 B^{12} v23 + 272160 \Gamma B^0 u24 + 30240 \Gamma^2 B^{11} v22 + 20160 \Gamma^2 B^{14} v25$$

$$+ 435456 \Gamma B^0 u21 + 311040 \Gamma B^8 u23 + 36288 \Gamma^2 B^{10} v21 + 362880 \Gamma B^7 u22$$

$$+ 3528 \mu^2 B^{12} \Gamma^3 u01 + 570240 \mu^2 B^8 \Gamma u05 + 1451520 \mu^2 B^2 \Gamma \lambda + 749952 \mu^2 B^6 \Gamma u03$$

$$+ 889056 \mu^2 B^5 \Gamma u02 + 51840 \mu \Gamma B^8 v14 + 5880 \mu^2 B^{10} \Gamma^3 \lambda + 3528 \mu^2 B^{12} \Gamma^3 \theta_{TW}$$

$$+ 1391040 \mu^2 B^3 \Gamma \theta_0 + 1088640 \mu^2 B^4 \Gamma^3 u05 + 2520 \mu^2 B^{14} \Gamma^3 u03 + 2940 \mu^2 B^{13} \Gamma^3 u02$$

$$+ 2205 \mu^2 B^{15} \Gamma^3 u04 + 1960 \mu^2 B^{16} \Gamma^3 u05 + 2520 \mu^2 B^{14} \Gamma^3 u03 + 2940 \mu^2 B^{13} \Gamma^3 u02$$

$$- 4320 \mu B^{12} \Gamma^2 u14 - 604800 \mu \Gamma B^4 p + 50400 \mu \Gamma B^9 v15 + 1088640 \mu^2 B^4 \Gamma u01$$

$$+ 51840 \mu \Gamma B^7 v13 - 4200 \mu B^{13} \Gamma^2 u15 - 4032 \mu B^{10} \Gamma^2 u12 + 48384 \mu \Gamma B^6 v12$$

$$- 30240 \mu B^8 \Gamma^2 q - 4320 \mu B^{11} \Gamma^2 u13 + 36288 \mu \Gamma B^5 v11 - 3024 \mu B^9 \Gamma^2 u11 )$$

$$= 22 \text{ terms}$$

$$\Rightarrow \text{input} := \text{simplify}(\text{a2}/(\text{mu}^2 \text{*Gamma}/(\text{Gamma}^2 \text{*2*B}^2 \text{*B}^2 \text{+14})):$$

$$\Rightarrow \text{ex}(\text{u0}, 5) \text{ ; ex}2(\text{u1}, 5) \text{ ; ex}2(\text{v1}, 5) \text{ ; ex}2(\text{v2}, 5);$$

$$\left( \frac{7}{180} B^{11} \Gamma^2 + 12 B^3 \right) u01 + \left( \frac{49}{5} B^4 + \frac{7}{216} B^{12} \Gamma^2 \right) u02 + \left( \frac{124}{15} B^5 + \frac{1}{36} B^{13} \Gamma^2 \right) u03$$

$$+ \left( \frac{50}{7} B^6 + \frac{7}{288} \Gamma^2 B^{14} \right) u04 + \left( \frac{44}{7} B^7 + \frac{7}{324} B^{15} \Gamma^2 \right) u05$$

$$- \frac{1}{30} \frac{B^8 \Gamma u11}{\mu} - \frac{2}{45} \frac{B^9 \Gamma u12}{\mu} - \frac{1}{21} \frac{B^{10} \Gamma u13}{\mu} - \frac{1}{21} \frac{B^{11} \Gamma u14}{\mu} - \frac{5}{9} \frac{B^{12} \Gamma u15}{\mu}$$

$$- \frac{24}{5} \frac{B^3 v21}{\mu^2} + \frac{4}{15} \frac{B^{10} \Gamma v22}{\mu^2} + \frac{2}{7} \frac{B^{11} \Gamma v23}{\mu^2} + \frac{1}{4} \frac{B^{12} \Gamma v24}{\mu^2} + \frac{2}{9} \frac{\Gamma B^{13} v25}{\mu^2}$$

$$- \frac{2}{3} \frac{B^3 P}{\mu}$$

$$- \left( -\frac{128}{3} \frac{B}{\mu} \Gamma \right) q$$

$$- \left( -\frac{128}{3} \frac{B}{\mu} \Gamma \right) q$$

$$- \left( \frac{66}{3} B^2 - \frac{7}{144} \Gamma^2 B^{10} \right) \theta_0$$

$$(16B + \frac{7}{7} \frac{B^9 \Gamma^2}{144} \Gamma^2 B^{10} \right) \theta_0$$

```
\left(\frac{7}{180} B^{11} \Gamma^2 + 12 B^3\right) \Theta_{TW}
                                                                                                                                   (89)
Lateral flapping Taylor series
> b2dev := series(b2,mu=0):
Constant term (u2, v2)
 > b20 := simplify(convert(series(b2,mu=0,1),polynom));
b20 := -\frac{1}{1260} \frac{1}{R^8 \Gamma^2 + 144} \left( \Gamma B^5 \left( 504 \Gamma B^4 u21 + 420 \Gamma B^5 u22 + 360 \Gamma B^6 u23 - 3360 B^4 v25 \right) \right)
                                                                                                                                   (90)
       -6048 v21 - 5040 B v22 - 4320 B^2 v23 - 3780 B^3 v24 + 280 \Gamma B^8 u25 + 315 \Gamma B^7 u24)
mu factor (u1, v1)
 > b21 := mu*simplify(subs(lambda=0,theta[0]=0,theta[TW]=0,coeff
      (b2dev,mu)));
b21 := -\frac{1}{3780} \frac{1}{R \left(R^8 \Gamma^2 + 144\right)} \left(\mu \left(175 \Gamma^2 B^{13} v15 + 168 \Gamma^2 B^{10} v12 + 483840 p\right)\right)
                                                                                                                                   (91)
      +2160 \Gamma B^7 u I 3 + 2160 \Gamma B^8 u I 4 + 2100 \Gamma B^9 u I 5 + 126 \Gamma^2 B^9 v I I + 1260 \Gamma^2 B^8 p
       -25200 \Gamma B^{4} q + 1512 \Gamma B^{5} u I I + 2016 \Gamma B^{6} u I 2 + 180 \Gamma^{2} B^{12} v I 4 + 180 \Gamma^{2} B^{11} v I 3))
mu^2 factor (lambda, theta[0], theta[TW], u0)
 > b22 := mu^2*simplify(subs(u11=0,u12=0,u13=0,u14=0,u15=0,v11=0,
     v12=0,v13=0,v14=0,v15=0,u21=0,u22=0,u23=0,u24=0,u25=0,v21=0,v22=
      0, v23=0, v24=0, v25=0, coeff(b2dev, mu^2)));
b22 := -\frac{1}{7560} \frac{1}{R^8 \Gamma^2 + 144} \left( \mu^2 \Gamma^2 B^5 \left( 2000 B^6 u05 + 3234 B^3 u02 + 2688 B^4 u03 + 5250 B \theta_0 \right) \right)
                                                                                                                                   (92)
      +4200 \lambda + 4032 B^2 u01 + 4032 B^2 \theta_{TW} + 2295 B^5 u04)
> b2 := simplify(b20+b21+b22);

b2 := -\frac{1}{7560} \frac{1}{B(B^8 \Gamma^2 + 144)} \left(967680 p \mu + 2295 \mu^2 \Gamma^2 B^{11} u04 + 4320 \mu \Gamma B^7 u13\right)
                                                                                                                                   (93)
      +4320 \mu \Gamma B^8 u I 4 + 4200 \mu \Gamma B^9 u I 5 + 252 \mu \Gamma^2 B^9 v I I + 2520 \mu \Gamma^2 B^8 p
      -50400 μ Γ B^4 q + 3024 μ Γ B^5 u11 + 4032 μ Γ B^6 u12 + 360 μ \Gamma^2 B^{12} v14
      +360 \mu \Gamma^{2} B^{11} v 13 + 2000 \mu^{2} \Gamma^{2} B^{12} u 05 + 3234 \mu^{2} \Gamma^{2} B^{9} u 02 + 2688 \mu^{2} \Gamma^{2} B^{10} u 03
      +\,5250\,{\mu}^{2}\,{\Gamma}^{2}{\it B}^{7}\,{\theta}_{0}\,+\,4200\,{\mu}^{2}\,{\Gamma}^{2}{\it B}^{6}\,\lambda\,+\,4032\,{\mu}^{2}\,{\Gamma}^{2}{\it B}^{8}\,{\it u01}\,+\,4032\,{\mu}^{2}\,{\Gamma}^{2}{\it B}^{8}\,{\theta}_{{\it true}}
      +350 \,\mu\,\Gamma^{2}\,B^{13}\,v^{15} + 336 \,\mu\,\Gamma^{2}\,B^{10}\,v^{12} - 25920\,B^{8}\,\Gamma\,v^{23} - 36288\,B^{6}\,\Gamma\,v^{21}
      -30240 B^7 \Gamma v22 - 20160 B^{10} \Gamma v25 - 22680 B^9 \Gamma v24 + 2520 B^{11} u22 \Gamma^2
      +3024 B^{10} u21 \Gamma^{2} + 2160 B^{12} u23 \Gamma^{2} + 1890 B^{13} u24 \Gamma^{2} + 1680 B^{14} u25 \Gamma^{2}
b2 terms
 > input := simplify(b2/(-mu^2*Gamma^2/(Gamma^2*B^8+144))):
```

```
> ex2(u0,5);ex2(u1,5);ex2(v1,5);ex2(u2,5);ex2(v2,5);
                               \frac{8}{15} B^7 u01 + \frac{77}{180} B^8 u02 + \frac{16}{45} B^9 u03 + \frac{17}{56} B^{10} u04 + \frac{50}{180} B^{11} u05
                                      \frac{2}{5} \frac{B^4 u11}{\mu \Gamma} + \frac{8}{15} \frac{B^5 u12}{\mu \Gamma} + \frac{4}{7} \frac{B^6 u13}{\mu \Gamma} + \frac{4}{7} \frac{B^7 u14}{\mu \Gamma} + \frac{5}{9} \frac{B^8 u15}{\mu \Gamma}
                            \frac{1}{30} \frac{B^8 v11}{\Pi} + \frac{2}{45} \frac{B^9 v12}{\Pi} + \frac{1}{21} \frac{B^{10} v13}{\Pi} + \frac{1}{21} \frac{B^{11} v14}{\Pi} + \frac{5}{108} \frac{B^{12} v15}{\Pi}
                                  \frac{2}{5} \frac{B^9 u21}{u^2} + \frac{1}{3} \frac{B^{10} u22}{u^2} + \frac{2}{7} \frac{B^{11} u23}{u^2} + \frac{1}{4} \frac{B^{12} u24}{u^2} + \frac{2}{9} \frac{B^{13} u25}{u^2}
                                     -\frac{24}{5} \frac{B^{5} v21}{\Gamma u^{2}} - \frac{4 B^{6} v22}{\Gamma u^{2}} - \frac{24}{7} \frac{B^{7} v23}{\Gamma u^{2}} - \frac{3 B^{8} v24}{\Gamma u^{2}} - \frac{8}{3} \frac{B^{9} v25}{\Gamma u^{2}}
                                                                                                                                                                                                                                            (94)
> ex1(p); ex1(q); ex1(lambda); ex1(theta[0]); ex1(theta[TW]);
                                                                                        \left(\frac{128}{\mu R \Gamma^2} + \frac{1}{3} \frac{B'}{\mu}\right) p
                                                                                                     -\frac{20}{3} \frac{B^3 q}{\Gamma \Pi}
                                                                                                         \frac{5}{9} B^5 \lambda
                                                                                                        \frac{25}{36} B^6 \theta_0
                                                                                                      \frac{8}{15} B^7 \theta_{TW}
                                                                                                                                                                                                                                            (95)
Code generation: a2, b2
 > Java([ga2=subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,a2),gb2=subs
          (theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,b2)],coercetypes=false,
          optimize=true,output="GyroRotorFiles/a2b2.java");
Compute torsional deformation coefficient
Define procedure to compute matrix coefficients
 > computeMatrix := proc(input,order)
             local j,1,coef;
             global k,m,n;
             for j from 1 to order do;
                    coef := coeff(input,x^j);
                   m[k,1]:=coeff(coef,u01):m[k,2]:=coeff(coef,u02):m[k,3]:=coeff
          (coef, u03):m[k,4]:=coeff(coef, u04):m[k,5]:=coeff(coef, u05):
                    m[k,6]:=coeff(coef,ull):m[k,7]:=coeff(coef,ul2):m[k,8]:=coeff
          (coef,ul3):m[k,9]:=coeff(coef,ul4):m[k,10]:=coeff(coef,ul5):
                   m[k,11] := coeff(coef,v11) : m[k,12] := coeff(coef,v12) : m[k,13] :=
         coeff(coef,v13):m[k,14]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k,15]:=coeff(coef,v14):m[k
         v15):
```

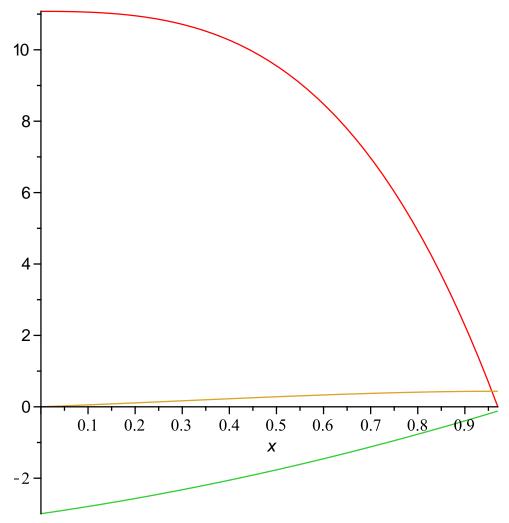
```
m[k,16] := coeff(coef,u21) : m[k,17] := coeff(coef,u22) : m[k,18] :=
                 coeff(coef,u23):m[k,19]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):m[k,20]:=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24):=coeff(coef,u24)
                 u25):
                                    m[k,21]:=coeff(coef,v21):m[k,22]:=coeff(coef,v22):m[k,23]:=
                 coeff(coef, v23):m[k, 24]:=coeff(coef, v24):m[k, 25]:=coeff(coef, v24):m[
                 v25):
                              n[k] := m[k,1]*u01+m[k,2]*u02+m[k,3]*u03+m[k,4]*u04+m[k,5]*
                 u05+m[k,6]*u11+m[k,7]*u12+m[k,8]*u13+m[k,9]*u14+m[k,10]*u15+m[k,
                 11]*v11+m[k,12]*v12+m[k,13]*v13+m[k,14]*v14+m[k,15]*v15:
                              n[k] := n[k] + m[k,16] * u21 + m[k,17] * u22 + m[k,18] * u23 + m[k,19] * u24 + m
                   [k,20]*u25+m[k,21]*v21+m[k,22]*v22+m[k,23]*v23+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,24]*v24+m[k,2
                  25]*v25:
                              n[k] := simplify(n[k]-coef):
                              k:=k+1;
                        od;
                  end proc;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          (96)
computeMatrix := proc(input, order)
                   local j, l, coef,
                   global k, m, n;
                   for j to order do
                                    coef := coeff(input, x^{j});
                                    m[k, 1] := coeff(coef, u01);
                                    m[k, 2] := coeff(coef, u02);
                                    m[k, 3] := coeff(coef, u03);
                                    m[k, 4] := coeff(coef, u04);
                                    m[k, 5] := coeff(coef, u05);
                                    m[k, 6] := coeff(coef, u11);
                                    m[k, 7] := coeff(coef, u12);
                                    m[k, 8] := coeff(coef, u13);
                                    m[k, 9] := coeff(coef, u14);
                                    m[k, 10] := coeff(coef, u15);
                                    m[k, 11] := coeff(coef, v11);
                                    m[k, 12] := coeff(coef, v12);
                                    m[k, 13] := coeff(coef, v13);
                                    m[k, 14] := coeff(coef, v14);
                                    m[k, 15] := coeff(coef, v15);
                                    m[k, 16] := coeff(coef, u21);
                                    m[k, 17] := coeff(coef, u22);
                                    m[k, 18] := coeff(coef, u23);
                                    m[k, 19] := coeff(coef, u24);
                                    m[k, 20] := coeff(coef, u25);
                                    m[k, 21] := coeff(coef, v21);
```

```
m[k, 22] := coeff(coef, v22);
               m[k, 23] := coeff(coef, v23);
               m[k, 24] := coeff(coef, v24);
               m[k, 25] := coeff(coef, v25);
               n[k] := m[k, 1] * u01 + m[k, 2] * u02 + m[k, 3] * u03 + m[k, 4] * u04 + m[k, 5] * u05
                +m[k, 6]*u11+m[k, 7]*u12+m[k, 8]*u13+m[k, 9]*u14+m[k, 10]*u15+m
               [k, 11] * v11 + m[k, 12] * v12 + m[k, 13] * v13 + m[k, 14] * v14 + m[k, 15] * v15;
               n[k] := n[k] + m[k, 16] * u21 + m[k, 17] * u22 + m[k, 18] * u23 + m[k, 19] * u24 + m
               [k, 20] * u25 + m[k, 21] * v21 + m[k, 22] * v22 + m[k, 23] * v23 + m[k, 24] * v24 + m[k, 
               [k, 25] * v25;
               n[k] := simplify(n[k] - coef);
               k := k + 1
        end do
end proc
Compute matrix m and n
 > k:=1; K1 := coeff(DP,cpsi): K2 := coeff(DP,spsi): K3 := coeff
        (DP,c2psi): K4 := coeff(DP,s2psi):
                                                                                                                                                                             (97)
                                                                               k := 1
> computeMatrix(K1,5):
> computeMatrix(K2,5):
> computeMatrix(K3,5):
> computeMatrix(K4,5):
> K5 := simplify(DP-K1*cpsi-K2*spsi-K3*c2psi-K4*s2psi):
> computeMatrix(K5,5):
> m:= map(simplify,m):
Code génération : m
 > Java(subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,m),coercetypes=
       false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/Dm.java");
Code génération : n
 > Java(subs(theta[0]=theta0,theta[TW]=thetaTW,n),coercetypes=
        false,optimize=true,output="GyroRotorFiles/Dn.java");
Extract sine and cosine components of total torsionnal moment for plotting
> NP := subs(cos(psi)=cpsi,sin(psi)=spsi,cos(2*psi)=c2psi,sin(2*
       psi)=s2psi,sin(3*psi)=0,cos(3*psi)=0,sin(4*psi)=0,cos(4*psi)=0,
       NP):
> Mul := coeff(NP,cpsi):
> Mv1 := coeff(NP,spsi):
> Mu2 := coeff(NP,c2psi):
> Mv2 := coeff(NP,s2psi):
> Mu0 := simplify(NP-Mu1*cpsi-Mv1*spsi-Mu2*c2psi-Mv2*s2psi):
Numerical application: validation test
```

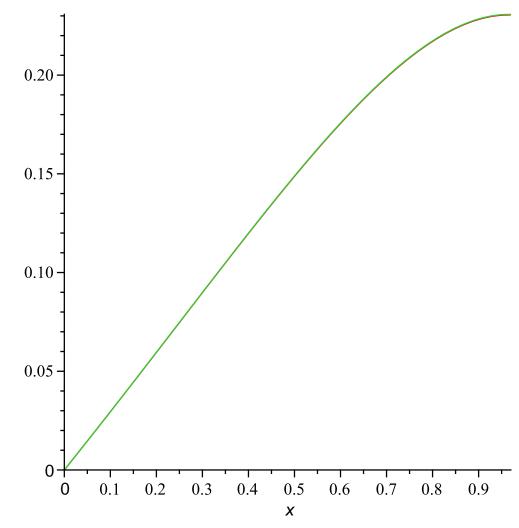
```
> mu := 0.1678124092350715 ; lambda := 0.013486848994919694 ;
   Omega := 36.96635711289101;
                            \mu := 0.1678124092350715
                           \lambda := 0.013486848994919694
                            \Omega := 36.96635711289101
                                                                                 (98)
> a := 5.7 ; delta := 0.011; Cm := 0.005 ; xac := 0.278 ; rho :=
   1.225; b := 2 ; R := 4; c := 0.2 ; xcg := 0.3 ; theta[TW] :=
   evalf[15](2*Pi/180); GJ := 6350; B := 0.97; Ib := 64.0; Ic
   := 64.04 ; Gamma := rho*a*c*R^4/Ib ; l:= (xcg-xac)*c ; Icb :=
   Ic - Ib ; K := evalf(GJ/R) ; theta[0] := evalf[15](2*Pi/180) ;
   q:=evalf[15](2/Omega*Pi/180); p:=evalf[15](-3/Omega*Pi/180);
                                    a := 5.7
                                   \delta := 0.011
                                  Cm := 0.005
                                  xac := 0.278
                                   \rho := 1.225
                                    b := 2
                                    R := 4
                                    c := 0.2
                                   xcg := 0.3
                           \theta_{TW} := 0.0349065850398865
                                  GJ := 6350
                                   B := 0.97
                                   Ib := 64.0
                                  Ic := 64.04
                                \Gamma := 5.586000000
                                  l := 0.0044
                                  Icb := 0.04
                                K := 1587.500000
                            \theta_0 := 0.0349065850398865
                           q := 0.000944279819980256
                           p := -0.00141641972997038
                                                                                 (99)
> m1:=map(evalf,m):n1:=map(evalf,n):
Pitch deformation coefficient
> d := evalm(inverse(m1)&*n1);
d := [0.004730699538, 0.0005118462123, -0.0001653425540, -0.001056776727,
                                                                                (100)
   -0.0003354164919, 0.0001592359784, -0.000009297477472, 0.0002541576294,
   -0.0002334027587, -0.000001014780838, 0.001445748076, -0.0002098720893,
   -0.0007005720482, 0.0002663746634, -0.00001464318928, 0.0001979039775,
```

```
0.00008910681858, -0.0001322480765, 0.000003997170590, -0.000002204490653,
   -0.00001884406612, 0.00006310115512, -0.00007620769151, 0.00003070869921,
   5.055971087 10<sup>-8</sup>]
> u01:=d[1]:u02:=d[2]:u03:=d[3]:u04:=d[4]:u05:=d[5]:u11:=d[6]
   :u12:=d[7]:u13:=d[8]:u14:=d[9]:u15:=d[10]:v11:=d[11]:v12:=d[12]
   :v13:=d[13]:v14:=d[14]:v15:=d[15]:u21:=d[16]:u22:=d[17]:u23:=d
   [18]:u24:=d[19]:u25:=d[20]:v21:=d[21]:v22:=d[22]:v23:=d[23]
   :v24:=d[24]:v25:=d[25]:
Pitch deformation at tip
> evalf[15]((u01+u02+u03+u04+u05)*180/Pi);
                            0.211135519168619
                                                                          (101)
> evalf[15]((u11+u12+u13+u14+u15)*180/Pi);
                           0.00972186712599437
                                                                          (102)
> evalf[15]((v11+v12+v13+v14+v15)*180/Pi);
                            0.0450938074704633
                                                                          (103)
> evalf[15]((u21+u22+u23+u24+u25)*180/Pi);
                           0.00896996365230856
                                                                          (104)
> evalf[15]((v21+v22+v23+v24+v25)*180/Pi);
                          -0.0000682589596071167
                                                                          (105)
Flapping coefficient
> evalf[15](a0*180/Pi); evalf[15](a1*180/Pi);evalf[15](b1*180/Pi);
   evalf[15](a2*180/Pi); evalf[15](b2*180/Pi);
                             3.03409110926474
                             1.76342065635421
                             0.894100707588128
                            0.0627955850279689
                           -0.000478424378879890
                                                                          (106)
Normalization coefficient for one blade
> Kf1 := evalf[15](Kf/b) ; Kq1 := evalf[15](Kq/2) ;
                          Kf1 := 21426.9012325414
                          Ka1 := 85707.6049301655
                                                                          (107)
Thrust
> evalf[15](T);evalf[15](Kf1*TP1S);evalf[15](Kf1*TP1C);evalf[15]
   (Kf1*TP2S); evalf[15](Kf1*TP2C);
                             3232.77629417085
                             143.732273638253
                             58.609531427432
                             -6.8148797431993
                             105.851485983171
                                                                          (108)
Rear force
> evalf[15](Hp) ; evalf[15](Hi) ;
                             19.7763495505108
```

```
105.385938824211
                                                                           (109)
  evalf[15](Kf1*HpP1S);evalf[15](Kf1*HpP2C);
                             41.7716899076188
                             -9.88817477525544
                                                                           (110)
> evalf[15](Kf1*HiP1S);evalf[15](Kf1*HiP1C);evalf[15](Kf1*HiP2S);
   evalf[15](Kf1*HiP2C);
                             -44.5459585323269
                             -84.4368573641120
                             6.92035704001788
                             -2.86034930030347
                                                                           (111)
Lateral force
> evalf[15](Yi);
                             19.3624497239309
                                                                           (112)
> evalf[15](Kf1*YpP1C);evalf[15](Kf1*YpP2S);
                             -40.1123314756457
                             -9.88817477525544
                                                                           (113)
  evalf[15](Kf1*YiP1S);evalf[15](Kf1*YiP1C);evalf[15](Kf1*YiP2S);
   evalf[15](Kf1*YiP2C);
                             -82.0144521289266
                             53.0443573303871
                             -6.35851561263167
                             -6.71151830072516
                                                                           (114)
Torque
> evalf[15](Qp) ; evalf[15](Qi) ;
                             -242.309982685552
                             242.309982671682
                                                                           (115)
  evalf[15](Kq1*QpP1S);evalf[15](Kq1*QpP2C);
                             -52.7369321346955
                             3.31871686394616
                                                                           (116)
> evalf[15](Kq1*QiP1S);evalf[15](Kq1*QiP1C);evalf[15](Kq1*QiP2S);
   evalf[15](Kq1*QiP2C);
                             -166.773362278540
                             25.3555997328135
                             -8.14605300875965
                             8.09729727480028
                                                                           (117)
Plot aerodynamic torsional moment, propeller moment and 10 time inertial forces at given azimuth
> plot (\{subs(psi=0,dN),subs(psi=0,dP),10*subs(psi=0,S)\},x=0..
  B) ;
```

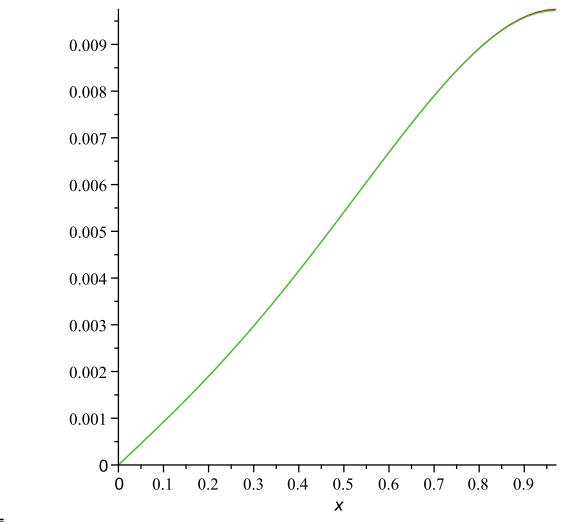


Plot pitch deformation at given azimuth and compare with valur computed with total torsional moment > plot({subs(psi=0,nu)\*180/Pi,int(subs(psi=0,dN+dP),x=0..x)\*
180/Pi/K},x=0..B);



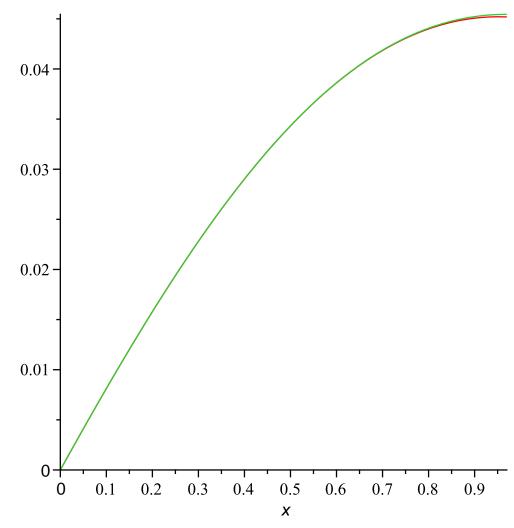
#### = Check u1

> plot({(u11\*x+u12\*x^2+u13\*x^3+u14\*x^4+u15\*x^5)\*180/Pi,evalf(Mu1\*
180/Pi/K)},x=0..B);



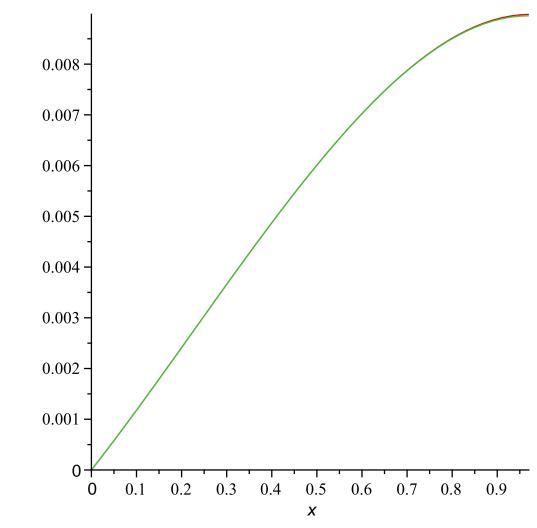
## Check v1

> plot({(v11\*x+v12\*x^2+v13\*x^3+v14\*x^4+v15\*x^5)\*180/Pi,evalf(Mv1\*
180/Pi/K)},x=0..B);



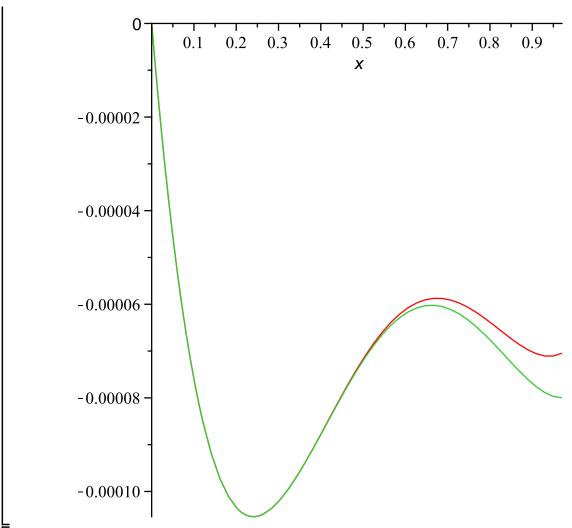
# Check u2

> plot({(u21\*x+u22\*x^2+u23\*x^3+u24\*x^4+u25\*x^5)\*180/Pi,evalf(Mu2\*
180/Pi/K)},x=0..B);



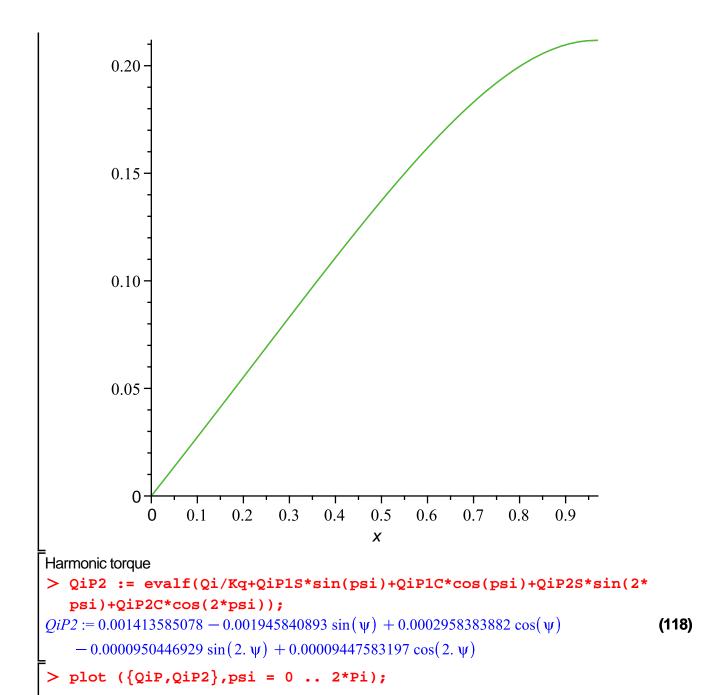
## Check v2

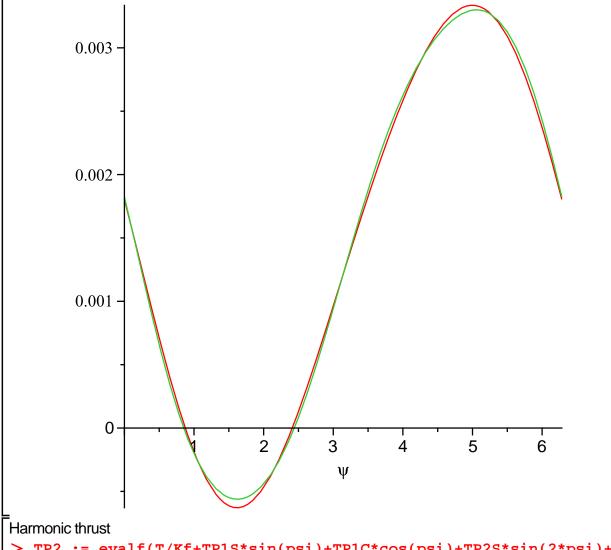
> plot({(v21\*x+v22\*x^2+v23\*x^3+v24\*x^4+v25\*x^5)\*180/Pi,evalf(Mv2\*
180/Pi/K)},x=0..B);

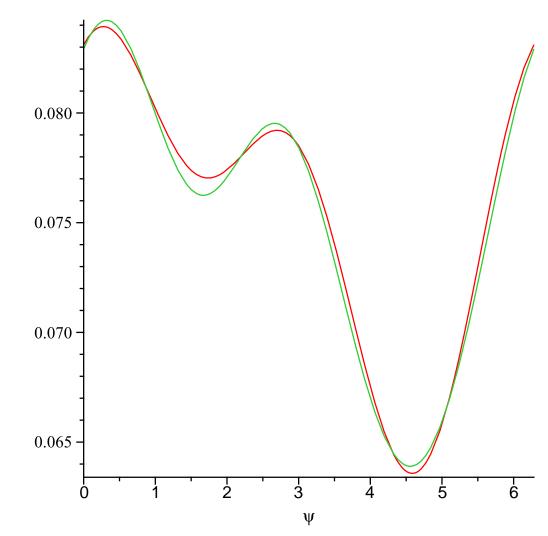


## Check mean term

> plot({(u01\*x+u02\*x^2+u03\*x^3+u04\*x^4+u05\*x^5)\*180/Pi,evalf(Mu0\*
180/Pi/K)},x=0..B);



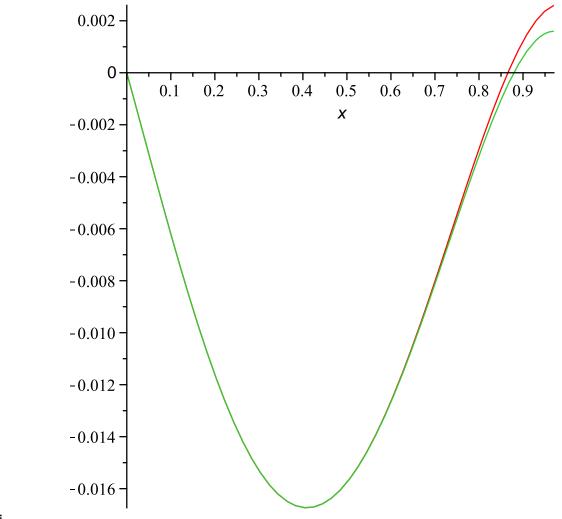




```
_Numerical application : KD1 Gyro
```

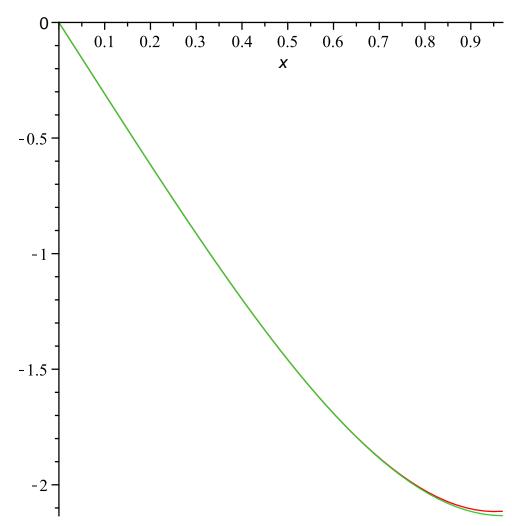
```
> mu := 0.31388398812868695 ; lambda := 0.013511805577481526 ; Omega := 22.412411639740625; \mu := 0.31388398812868695 \lambda := 0.013511805577481526 \Omega := 22.412411639740625 (120) \Rightarrow a := 5.862 \text{ ; delta } := 0.013101 \text{ ; } \text{Cm } := -0.056 \text{ ; } \text{xac } := 0.242 \text{ ; rho}
```

```
b := 3
                                   R := 6.096
                                  c := 0.3048
                                  xcg := 0.28
                                  \theta_0 := 0.096
                                   \theta_{TW} := 0
                                 GJ := 11021.26
                                   B := 0.97
                                 Ib := 237.268
                                 Ic := 237.268
                                \Gamma := 12.38549026
                                 l := 0.0115824
                                   Icb := 0.
                                K := 1807.949475
                                    q := 0
                                    p := 0
                                                                                (121)
> m1:=map(evalf,m):n1:=map(evalf,n):
Pitch deformation coefficient
> d := evalm(inverse(m1)&*n1);
d := [-0.04877342542, 0.003010265088, -0.001395648429, 0.01112287276, 0.001916015693, (122)
   -0.001080017230, -0.0004350078620, 0.004426090676, -0.002879078022,
   0.00001331073417, -0.05385953252, -0.001908580244, 0.01303764713,
   0.004030946303, 0.001942020382, 0.01271623237, -0.002968830791,
   -0.001511983180, -0.0005129644383, -0.0005161798390, -0.003142287991,
   0.002000054274, -0.001827838805, 0.001128582559, 0.0001306536092
> u01:=d[1]:u02:=d[2]:u03:=d[3]:u04:=d[4]:u05:=d[5]:u11:=d[6]
   :u12:=d[7]:u13:=d[8]:u14:=d[9]:u15:=d[10]:v11:=d[11]:v12:=d[12]
   :v13:=d[13]:v14:=d[14]:v15:=d[15]:u21:=d[16]:u22:=d[17]:u23:=d
   [18]:u24:=d[19]:u25:=d[20]:v21:=d[21]:v22:=d[22]:v23:=d[23]
   :v24:=d[24]:v25:=d[25]:
Check u1
> plot({(u11*x+u12*x^2+u13*x^3+u14*x^4+u15*x^5)*180/Pi,evalf(Mu1*
   180/Pi/K), x=0..B);
```



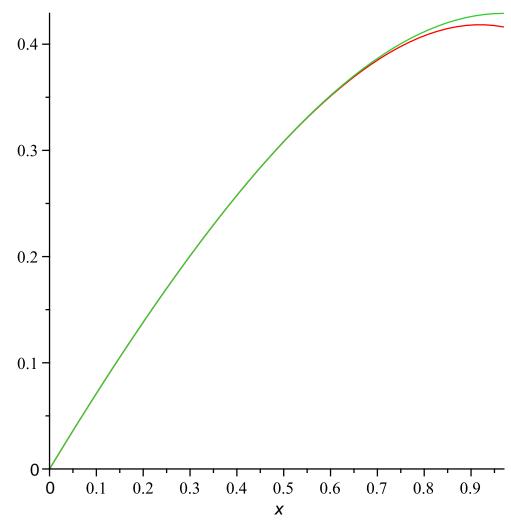
#### -Check v1

> plot({(v11\*x+v12\*x^2+v13\*x^3+v14\*x^4+v15\*x^5)\*180/Pi,evalf(Mv1\*
180/Pi/K)},x=0..B);



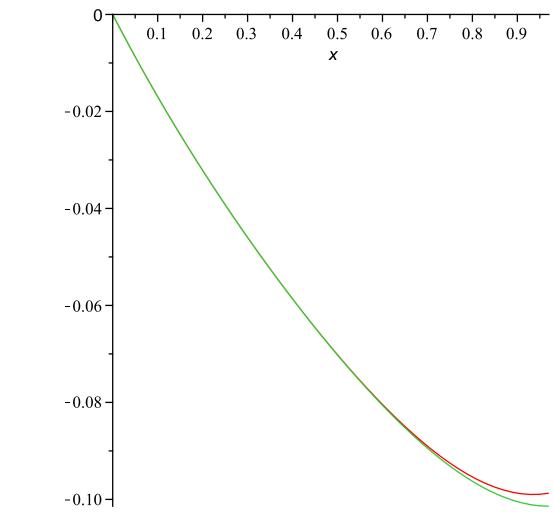
## Check u2

> plot({(u21\*x+u22\*x^2+u23\*x^3+u24\*x^4+u25\*x^5)\*180/Pi,evalf(Mu2\*
180/Pi/K)},x=0..B);



# Check v2

> plot( $\{(v21*x+v22*x^2+v23*x^3+v24*x^4+v25*x^5)*180/Pi,evalf(Mv2*180/Pi/K)\},x=0..B);$ 



#### Check mean term

> plot({(u01\*x+u02\*x^2+u03\*x^3+u04\*x^4+u05\*x^5)\*180/Pi,evalf(Mu0\*
180/Pi/K)},x=0..B);

